CÁTEDRAS

MATEMÁTICA

Para iniciar con éxito la universidad

Gustavo Menocal

EDUNSE
editorial universitaria

Rector
Ing. Héctor Rubén Paz

Vicerrectora
Lic. Hilda Marcela Juárez

Subsecretaria de Comunicaciones
Lic. María Gabriela Moyano

Coordinador Editorial
Dr. Lucas Daniel Cosci

Matemática para iniciar con éxito la universidad

Matemática para iniciar con éxito la universidad

Gustavo Menocal

Menocal, Gustavo Enrique
Matemática para iniciar con éxito la universidad / Gustavo Enrique Menocal. - 1a ed - Santiago del Estero : EDUNSE, 2024.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-4456-45-8

1. Matemática. I. Título.
CDD 510.711

Diseño de tapa y maquetación: Noelia Achaval Montenegro - María Eugenia Alonso
Edición: Ignacio Daniel Ratier

©Gustavo Menocal
© EDUNSE, 2024
Av. Belgrano (S) 1912 - G4200ABT
Santiago del Estero, Argentina
email: infoedunse@gmail.com
www.edunse.unse.edu.ar

Las opiniones expresadas en los libros publicados por EDUNSE no necesariamente reflejan los puntos de vista de la Subsecretaría de Comunicaciones ni del Comité Académico u otras autoridades de la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

Cualquier tipo de reproducción total o parcial de este libro, no autorizada por los editores, viola derechos reservados.

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.

ÍNDICE

Introducción

En las carreras universitarias que tienen en su currículo asignaturas de matemática, se observa con mucha frecuencia un dispar nivel académico de los estudiantes en esta área.

Este drama de la educación superior genera angustia en muchos estudiantes, pues llega en algunos casos a provocar la deserción –situación que los docentes observamos y comprendemos–, pero que no podemos solucionar por falta de tiempo para remediarlo en nuestras clases de matemática del nivel básico, lo que originó la necesidad de elaborar un material de estudio y de consultas que concentre los contenidos de esta materia del nivel medio, que es necesario dominar al momento de iniciar una carrera universitaria.

Con la experiencia de tres décadas de docencia de matemática universitaria, he podido observar la recurrencia de dificultades y hasta errores de muchos estudiantes en conocimientos clave, que tratan de ser destacados y aclarados en este texto.

El presente libro de cátedra orienta al docente del nivel medio acerca de los contenidos necesarios para abordar con éxito los estudios superiores, pudiendo reforzar su enseñanza. A su vez, es un material de consulta para los estudiantes de carreras universitarias que requieran una revisión de estos conocimientos.

Este volumen tiene una gran cantidad de ejemplos, que cubren la mayoría de los problemas tipo que pueden presentarse y contiene –además– ejercicios con grados de dificultad creciente, para que los estudiantes puedan ejercitarse y autoevaluarse. Al final presenta las respuestas de algunos de estos casos.

Este material está compuesto por tres capítulos: el primero, comprende nociones de algebra elemental, trigonometría y campos numéricos; el segundo, elementos de geometría analítica plana y el tercero está dedicado al estudio de funciones de una variable real.

Capítulo 1

Nociones de álgebra elemental - elementos de trigonometría - campos numéricos

Introducción

El presente capítulo cubre conocimientos de matemática impartidos en el nivel medio, que resultan imprescindibles para abordar con éxito cualquier estudio superior que los incluya. Está dividido en tres partes que se describen brevemente a continuación.

Primera parte: NOCIONES DE ÁLGEBRA ELEMENTAL
Simbología a utilizar. Potenciación. Propiedades de la Potenciación. Potencias con exponentes negativos. Radicación. Propiedades de la Radicación. Exponentes racionales. Extracción de factores de un radical. Expresiones Algebraicas. Factoreo de expresiones algebraicas. Factor común de un polinomio. Producto de un monomio por un polinomio. Cuadrado de un binomio. Trinomio Cuadrado Perfecto. Método para completar cuadrados. Diferencia de cuadrados. Producto de binomios conjugados. Factoreo por grupos. Cubo de un binomio. Trinomios de la forma: $ax^2 + bx + c$.
Descomposición factorial de polinomios de grado mayor que dos. Teorema de las raíces racionales de Gauss. Regla de Ruffini. Simplificación de expresiones algebraicas.

Segunda parte: ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA
Sistema sexagesimal de medición de ángulos. Sistema circular de medidas. Funciones Trigonométricas. Signos de las funciones trigonométricas. Cuadro resumen. Ángulos axiales y notables. Valores axiales y notables de las funciones trigonométricas. Identidades y fórmulas trigonométricas que se utilizan. Identidades trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas.

Tercera parte: CAMPOS NUMÉRICOS
Números reales. Subconjuntos que lo integran. No se puede dividir por cero. División por infinito. Redondeo de un número. Notaciones decimal y fraccionaria. Notación científica Ecuaciones. Propiedades de las ecuaciones. Desigualdades. Propiedades de las desigualdades. Desigualdades simples y dobles o continuas. Inecuaciones. Intervalos. Unión de intervalos. Intersección de intervalos. Inecuaciones enteras (lineales y cuadráticas), fraccionarias y continuas. Entorno de un número. Entorno reducido de un número. Valor absoluto o módulo de un número real. Representación geométrica. Principales propiedades del valor absoluto de un número real. Equivalencias más usadas.

Primera parte
Nociones de álgebra elemental

En este capítulo veremos algunos conocimientos de **Á**lgebra elemental, que los estudiantes deben dominar para abordar las distintas asignaturas de matemática en el nivel universitario.
El propósito, además de explicar los contenidos, presenta ejemplos que pretenden despejar dudas y dar una guía sobre los procesos a encarar en las situaciones más comunes.

Simbología a utilizar

$>$	Mayor que	$\forall$	Para todo	$\subset$	Está incluido
$<$	Menor que	$\wedge$	**y** lógico	$\subseteq$	Está incluido o es
$\geq$	Mayor o igual que	$\vee$	**ó** lógico	$\supset$	Incluye
$\leq$	Menor o igual que	$\{\}$	Notación de Conjunto	$\supseteq$	Incluye o es coincidente
$\neq$	Distinto que	$\in$	Pertenece a	$\varnothing$	Conjunto Vacío
$\cong$	Aproximadament e igual	$\notin$	No pertenece	$\pm$	Más o menos
$\exists$	Existe	$\bigcup$	Unión	$\therefore$	Luego, entonces
$\exists$	No Existe	$\bigcap$	Intersección	$\Rightarrow$	Implica
				$\Leftrightarrow$	Sí y solo sí

Potenciación

Sea *"**a**"* un número real; el producto de $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots . a}_{"n" veces}$
a: base de la potencia, y
***n:** exponente de la potencia; n pertenece al conjunto de los números Naturales.* $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$

EJEMPLO

a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

c) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

e) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

f) $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$

Importante: Todo número elevado a una **potencia par**, tiene **resultado positivo o nulo**.

$$\forall x; x^n \geq 0; Si \;\; n \;\; es \;\; par$$

EJEMPLO

$1)2^4 = 16;$ $\quad 2)0^2 = 0;$ $\quad 3)(-2)^4 = 16$

Importante: **Todo número elevado a una** potencia impar, **tiene el** resultado con igual signo que la base.

EJEMPLO

$1)2^3 = 8;$ $\quad 2)0^5 = 0;$ $\quad 3)(-2)^3 = -8$

Propiedades de la Potenciación:

Sean ***a, b, x*** e ***y*** números reales; entonces se cumple:

I) Producto de potencias de igual base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

II) Cociente de potencias de igual base: $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; con a \neq 0$

III) Potencia de potencia: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

IV) Potencia de un producto: $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

V) Potencia de un cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; con b \neq 0$

Importante: Todo número real distinto de cero, elevado a la cero, es igual a uno.

$$\forall a \in \Re; a \neq 0: a^0 = 1$$

EJEMPLO

a) $(-3)^2 \cdot (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6 = 3^6$

b) $\frac{5^7}{5^5} = 5^{7-5} = 5^2 = 25$

c) $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

d) $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

e) $\frac{(x \cdot y)^6}{(x \cdot y)} = (x \cdot y)^5$

f) $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$

g) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^3 = \frac{(2x)^3}{(3y)^3} = \frac{8x^3}{27y^3}$

h) $\left[(-3) \cdot \frac{1}{2}\right]^2 = (-3)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

Potencias con exponentes negativos:

$$Si\ a \neq 0 \wedge n > 0, se\ verifica: a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EJEMPLO

a) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2}$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{b}{a}\right)^{3}$

Radicación

Cuando se definió la Potencia, se consideró que el exponente es un número natural; si consideramos ahora que el exponente es un número $\frac{1}{n}$, $con\ n \geq 2$, tenemos:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = b\ si\ y\ solo\ si\ b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ se lee raíz enésima de ***a***, siendo ***a*** el radicando y ***n***, el índice de la raíz.

Importante: En el conjunto de los números reales, NO existen las raíces de índice par y radicando negativo:

$$Si\ \ n\ \ es\ \ par\ \ y\ \ a < 0, \sqrt[n]{a} \notin \Re$$

EJEMPLO

$$\sqrt[4]{-9} \notin \Re; \sqrt{-4} \notin \Re; \sqrt[6]{-2} \notin \Re$$

Propiedades de la Radicación:

I) La raíz es distributiva respecto del producto: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

II) La raíz es distributiva respecto del cociente: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

III) Raíz de raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Importante:
1) Si a o b son negativos y n o m son pares, NO son válidas estas propiedades.
2) La radicación NO es distributiva respecto de la suma Ni de la resta:

$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

Exponentes racionales

Los conceptos de Potenciación y Radicación se pueden extender, si se utilizan como exponentes números Racionales (Q); o sea de la forma

$$\frac{p}{q}; conpyq \in Zyq \neq 0$$

$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$ o bien: $(a^p)^{1/q} = \left(a^{1/q}\right)^p = a^{p/q}$

EJEMPLO

a) $\sqrt[3]{a^2 \cdot b^{-4}} = (a \cdot b^{-2})^{2/3} = a^{2/3} \cdot b^{-4/3}$ b) $\sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{b^3}} = \frac{a^{2/5}}{b^{3/5}}$

Extracción de factores de un radical

Si en el radicando aparecen factores cuyos exponentes son mayores o iguales que el índice, se pueden extraer de la raíz.

EJEMPLO

a) $\sqrt{4a^5 \cdot b^2} = \sqrt{2^2 \cdot a^4 \cdot a \cdot b^2} = 2 \cdot a^2 \cdot b \cdot \sqrt{a}$

b) $\sqrt[3]{16x^5y} = \sqrt[3]{2^4x^5y} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y} = 2x\sqrt[3]{2x^2y}$

Expresiones algebraicas

Son combinaciones de números y letras (llamadas variables), vinculadas entre sí por operaciones de suma, resta, multiplicación y/o división.

EJEMPLO

1) $x + 2y - z$

2) $\sqrt[3]{2x + y} - \frac{xy-z}{x-y}$

3) $\frac{x+y}{x-y}$

4) $a^2 - 3xy + \frac{4b^3}{\sqrt{x+y}}$

Las operaciones que dividen en términos una expresión algebraica, son las de suma y resta; a cada uno de estos términos se los denomina *Monomio*.

EJEMPLO

1) x^2

2) $\sqrt[3]{2x + y}$

3) $\frac{x+y}{x-y}$

4) $\frac{4b^3}{\sqrt{x+y}}$

Por lo tanto, si la expresión tiene dos términos: $x^2 + 2x$ es un ***Binomio***; si tiene tres términos: $\sqrt[3]{2x + y} - x^{3/2} + 4$ es un ***Trinomio***, etc.

Siguiendo este razonamiento, se define ***Polinomio en una variable real***:

$$P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x^1 + a_n$$

a_i: son números reales, además: $a_0 \neq 0$, puesto que es el coeficiente del término de mayor grado.

x: variable real

n: grado del polinomio; es un número Natural

Factoreo de expresiones algebraicas

Factorear una expresión algebraica significa realizar todas las transformaciones necesarias para expresarla como el producto de sus factores primos. Entre esas transformaciones, existen operaciones de agrupamiento y de descomposición, según se necesite. Veremos acá las que más se utilizan.

Factor Común de un polinomio (f.c.):

Cuando todos los términos de una expresión algebraica tienen un monomio en común, se lo puede extraer de ella.

$$(\hat{a} \cdot b + \hat{a} \cdot c) = \hat{a} \cdot (b + c)$$

EJEMPLO

1) $2x + 4xy - xz = x \cdot (2 + 4y - z)$
2) $4xz + 16xy^2z - 8x^2z^2 = 4xz \cdot (1 + 4y^2 - 2xz)$
3) $12m^{-2} + 8m^3 - 4m^4 = 4m^{-2}(3 + 2m^5 - m^6)$

El proceso inverso de este es el siguiente.

Producto de un monomio por un polinomio:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b + a \cdot c)$$

EJEMPLO

1) $x \cdot (2 + 4y - z) = 2x + 4xy - xz$
2) $4xz \cdot (1 + 4y^2 - 2xz) = 4xz + 16xy^2z - 8x^2z^2$
3) $4m^{-2} \cdot (3 + 2m^5 - m^6) = 12m^{-2} + 8m^3 - 4m^4$

Cuadrado de un Binomio:

Dados binomios de la forma: $(a+b)$ o $(a-b)$ si se los eleva al cuadrado, sus desarrollos son los siguientes.

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}\right\}(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Importante:
La potencia NO es distributiva respecto de la SUMA ni de la RESTA

$$(a+b)^x \neq a^x + b^x$$

El proceso inverso de este es el siguiente.

Trinomio Cuadrado Perfecto (t.c.p.):

$$\begin{cases}a^2+2ab+b^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2\\ a^2-2ab+b^2 = (a-b)\cdot(a-b) = (a-b)^2\end{cases}$$

Se pueden presentar de dos formas:

EJEMPLO

1)$4x^2-12x+9$, es un trinomio cuadrado perfecto, porque dos de sus términos son cuadráticos: $4x^2=(2x)^2$ y $9=3^2$, y el término lineal es el producto de estos (sin elevar al cuadrado): $2\cdot 2x\cdot 3 = 12x$. Entonces: $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$.
cuadrado): $2\cdot 2x\cdot 3 = 12x$.
Entonces: $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$. Análogamente:
2)$25x^2+20x+4$, también es un **t.c.p.,** por los mismos motivos descriptos más arriba; entonces: $25x^2+20x+4=(5x)^2+2\cdot 5x\cdot 2+(2)^2=(5x+2)^2$

Si ambos términos cuadráticos son negativos, se debe sacar factor común (-1):

EJEMPLO

$$-9x^2+24x-16=-\left(9x^2-\underbrace{24x}_{2\cdot 3x\cdot 4}+16\right)=-(3x-4)^2$$

Método para Completar Cuadrados:

Cuando se presenta un trinomio cuadrático que no es un ***t.c.p.***, se puede transformar la expresión en un ***t.c.p.*** más un número.
Dada la expresión: ax^2+bx+c analizaremos los siguientes casos:

Si $a=1$, se suma y se resta $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

EJEMPLO

1) Del trinomio: x^2+4x-3 , tomamos el coeficiente del término lineal: $b=4$, así que $\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{4}{2}\right)^2=2^2=4$. Finalmente $x^2+4x-3=(x+2)^2-7$

2) $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=\overbrace{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}^{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}-\frac{1}{16}-\frac{3}{2}\quad\therefore\quad x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}$

Si $a\neq 1$ se saca factor común y se procede de igual manera.

$$2x^2-20x+8=2\left(x^2-10x+4\right)=2\cdot\left(\overbrace{x^2-10x+25}^{(x-5)^2}-25+4\right)=2\cdot\left[(x-5)^2-21\right]$$

Finalmente: $2x^2-20x+8=2\cdot(x-5)^2-42$

EJEMPLO

$$a)x^2 - 4x + 2 = \left(\overbrace{x^2 - 4x + 4}^{t.c.p.}\right) - 4 + 2 = (x-2)^2 - 2$$

$$b)y^2 - 12y + 8 = \left(\overbrace{y^2 - 12y + 36}^{t.c.p.}\right) - 36 + 8 = (y-6)^2 - 28$$

Diferencia de Cuadrados (d.c.):

Cuando se presenta la diferencia entre dos monomios, cada uno de ellos elevados al cuadrado, se los factorea como el producto de dos binomios conjugados.

$$a^2 - b^2 = \underbrace{(a-b)\cdot(a+b)}_{BINOMIOSCONJUGADOS}$$

El proceso inverso de este es el siguiente.

EJEMPLO

$$1)4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x - 5y)\cdot(2x + 5y)$$
$$\therefore 4x^2 - 25y^2 = (2x - 5y)\cdot(2x + 5y)$$
$$2)9x^2 - 4y^2 + 4y - 1 = (3x)^2 - (2y-1)^2$$
$$= [3x - (2y-1)]\cdot(3x + 2y - 1)$$
$$\therefore 9x^2 - 4y^2 + 4y - 1 = (3x - 2y + 1)\cdot(3x + 2y - 1)$$

Importante:
$a^2 + b^2$ NO SE PUEDE FACTOREAR

Producto de dos binomios conjugados:

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

1) $(2x - 5y) \cdot (2x + 5y) = (2x)^2 - (5y)^2 = 4x^2 - 25y^2$

$\therefore (2x - 5y) \cdot (2x + 5y) = 4x^2 - 25y^2$

2) $[3x - (2y - 1)] \cdot [3x + (2y - 1)] = (3x)^2 - (2y - 1)^2$

$= 9x^2 - 4y^2 + 4y - 1$

$\therefore (3x - 2y + 1) \cdot (3x + 2y - 1) = 9x^2 - 4y^2 + 4y - 1$

Factoreo por Grupos:

Si una expresión algebraica tiene cuatro términos o más, con elementos comunes en algunos de ellos, se la puede reducir agrupándolos adecuadamente y luego factorear utilizando los métodos anteriores.

EJEMPLO

1) $\overbrace{a^3 - a^2b} - \overbrace{ab^2 + b^2} \underbrace{=}_{f.c.} a^2\overbrace{(a-b)} - b^2\overbrace{(a-b)} \underbrace{=}_{f.c.} (a-b)\cdot(a^2 - b^2) \underbrace{=}_{d.c.} (a-b)\cdot(a-b)\cdot(a+b$

$\therefore a^3 - a^2b - ab^2 + b^2 = (a-b)^2 \cdot (a+b)$

2) $9x^2 - 4y^2 + 4yz - z^2 \underbrace{=}_{f.c.} 9x^2 - (4y^2 - 4yz + z^2)$

$\underbrace{=}_{t.c.p.} 9x^2 - (2y - z)^2$

$\underbrace{=}_{d.c.} [3x - (2y - z)] \cdot (3x + 2y - z)$

$\therefore 9x^2 - 4y^2 + 4yz - z^2 = (3x + 2y + z) \cdot (3x + 2y - z)$

Cubo de un binomio:

Su desarrollo es un *cuatrinomio cubo perfecto*

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

$$(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b)^2 = (a+b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a-b)^3 = (a-b) \cdot (a-b)^2 = (a-b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$$

EJEMPLO

$$1)(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 + y^3$$
$$= 8x^3 + 12x^2 \cdot y + 6x \cdot y^2 + y^3$$
$$2)(z^{-1} - 3v)^3 = z^{-3} - 9z^{-2}v + 27z^{-1}v^2 - 27v^3$$

Trinomios de la forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$$

Para descomponer en factores polinomios de este tipo se usa la fórmula de Bäskara, que sirve para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática homogénea: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para determinar qué tipo de raíces tiene la ecuación, se debe analizar el discriminante de esta expresión, que es: $b^2 - 4ac$

Pueden presentarse los siguientes casos:

$$Si b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \exists\ 2\ raíces\ \Re\ distintas:\ x_1 \neq x_2$$
$$Si b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \exists\ 2\ raíces\ \Re iguales:\ x_1 = x_2$$
$$Si b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \nexists\ raíces\ \Re$$

Luego el polinomio expresado en forma factoreada es el siguiente.

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

EJEMPLO

Factorear

1)$x^2+3x-10$, para Factorear esta expresión buscamos las raíces de la ecuación

$x^2+3x-10=0$, usando la fórmula de Bäskara:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm 7}{2}=\begin{cases}x_1=-5\\ x_2=2\end{cases}$$

$$\therefore\ x^2+3x-10=\big(x-(-5)\big)\cdot(x-2)=(x+5)\cdot(x-2)$$

2)$2x^2+8x-10\ \therefore\ 2x^2+8x-10=0\Rightarrow x_{1,2}$

$$=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 2\cdot(-10)}}{2\cdot 2}=\frac{-8\pm 12}{4}$$

$$\begin{cases}x_1=-5\\ x_2=1\end{cases}\ \therefore\ 2x^2+8x-10=2\cdot\big(x-(-5)\big)\cdot(x-1)$$

Finalmente: $2x^2+8x-10=2\cdot(x+5)\cdot(x-1)$

3) $-3x^2+3x+6\ \therefore\ -3x^2 3x+6=0\Rightarrow x_{1,2}$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-3)\cdot 6}}{2\cdot(-3)}=\frac{-3\pm 9}{-6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-1\end{cases}$$

$$\therefore\ -3x^2 3x+6=-3\cdot(x-2)\cdot\big(x-(-1)\big)=-3\cdot(x-2)\cdot(x+1)$$

4)$3x^2-12x+12\ \therefore\ 3x^2-12x+12=0\Rightarrow x_{1,2}$

$$=\frac{12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 3\cdot 12}}{2\cdot 3}=\frac{12\pm 0}{6}\Rightarrow x_1=x_2=2$$

$$\therefore\ 3x^2-12x+12=3\cdot(x-2)^2$$

5)$x^2-2x+8\ \therefore\ x^2-2x+8=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1}$

$$=\frac{12\pm\sqrt{-12}}{2}\Rightarrow x_{1,2}\notin\Re$$

Descomposición factorial de polinomios de grado mayor o igual que dos

Para factorear un polinomio de grado mayor o igual que dos debemos determinar sus raíces (números que hacen que el polinomio valga cero). Para hallarlas podemos apelar al teorema de la raíz racional de Gauss, que dice que si un polinomio tiene raíces racionales, es posible encontrarlas entre los divisores del término independiente (a_0), y entre los cocientes que forman esos divisores con el coeficiente principal (a_0/a_n).

Para saber cuáles de esos valores son raíces del polinomio, aplicamos la **regla o método de *Ruffini***, debiendo dar cero (**0**) el último coeficiente de la división.

Cada una de las raíces encontradas formará un factor del polinomio de la forma (***x - raíz***).

Lo analizaremos de la manera siguiente.

EJEMPLO

$$P(x) = 4 + 2x^4 - x^3 - 2x - 6x^2$$

Teorema de las raíces racionales de Gauss

Si tenemos la ecuación polinómica con coeficientes enteros:

$$a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x^1 + a_n = 0,$$

Con: $a_0 y a_n$ números enteros y distintos de cero, entonces sus posibles

$$k = \frac{divisoresdea_n}{divisoresdea_0}$$

raíces racionales cumplen la condición

, aplicando este conocimiento a nuestro ejemplo:

a_n **=4**; luego, los divisores son: 1; -1; 2; -2; 4 y -4

a_o **=2**; luego, los divisores son: 1; -1; 2 y -2

Posibles raíces del polinomio: a_n/ a_o: 1, -1, 2, -2, 4, -4, 1/2 y -1/2

El polinomio puede ser divisible por algunos de estos binomios:

(x - 1), (x + 1), (x -2), (x + 2), (x + 4), (x - 4), (x – 1/2) y (x + 1/2).

Se elige un factor de prueba (por ejemplo: *x-2*) y se divide el polinomio en el binomio:

(x-2), para esto se puede aplicar la regla de Ruffini.

$$(4 + 2x^4 - x^3 - 2x - 6x^2):(x - 2)$$

Regla o método de Ruffini

Como ya se dijo, este método sirve para dividir un polinomio en un binomio de la forma ***(x-a)***, siendo ***a*** la ***posible raíz***. Consiste en desarrollar los siguientes pasos:

1º) Poner el polinomio dividendo, ***completo*** y ***ordenado***.

$$P(x) = 4 + 2x^4 - x^3 - 2x - 6x^2 \Rightarrow P(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - 2x + 4$$

2º) Ubican los coeficientes del polinomio en una fila y trazar una cruz, como se indica a continuación. Del lado izquierdo de la cruz se ubica el coeficiente de prueba:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -1 & -6 & -2 & 4 \\ 2 & \downarrow & 4 & 6 & 0 & -4 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

3º) Se "baja" el primer coeficiente, como indica la flecha,

4º) Luego se multiplica el coeficiente de prueba, ubicado en el ángulo superior izquierdo por el coeficiente que se bajó (2x2=4) y

5º) Se coloca este número por debajo del segundo coeficiente del polinomio dividendo;

6º) A continuación se la suman los números de la misma columna (-1+4=3) y se lo coloca debajo.

7º) Se continúa multiplicando el coeficiente de prueba, del ángulo superior izquierdo, por el número obtenido en el paso anterior (2x3=6) y se lo coloca debajo del coeficiente que sigue del polinomio dividendo.

8º) Se repite la operación hasta terminar con los coeficientes del listado superior.

Pueden darse dos posibilidades:

Que el último número obtenido sea cero (0), significa que la ***división* es *exacta***; entonces, el número de prueba es raíz del polinomio y los números obtenidos en el renglón último son los coeficientes del polinomio cociente, que es un grado menor que el polinomio dividendo.

$$(2x^4 - x^3 - 6x^2 - 2x + 4):(x - 2) = 2x^3 + 3x^2 - 2$$

Que el último número obtenido sea distinto de cero ($\neq 0$), significa que la división no es exacta; entonces, el número de prueba NO es raíz del

$$x = \frac{divisores\ \ de\ \ a_n}{divisores\ \ de\ \ a_0} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -2 \Rightarrow 1;\ -1;\ 2\ \ y\ -2 \\ a_n = 2 \Rightarrow 1;\ -1;\ 2\ \ y\ -2 \end{cases} \therefore \left\{1;\ -1;\ 2\ -2;\ \frac{1}{2}\ \ y\ -\frac{1}{2}\right\}$$

polinomio y hay que probar con otro coeficiente.

Este método se puede aplicar sucesivamente, si el polinomio cociente es de grado mayor o igual a dos.

En nuestro ejemplo, el polinomio cociente es: $2x^3 + 3x^2 - 2$, de grado 3. Aplicando nuevamente el teorema de Gauss y la regla de Ruffini, tenemos:

Ninguno de estos valores es cero del polinomio (haga la prueba), por lo tanto, este polinomio que queda como factor irreductible (*no tiene raíces reales*): $2x^3 + 3x^2 - 2$.

Entonces, el polinomio factoreado es el siguiente.

$$P(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - 2x + 4 = (x - 2) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 2)$$

EJEMPLO

EJEMPLO 2: Factorear

$$P(x)=2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

Divisores del término independiente ($a_n=6$): 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6
Divisores del coeficiente principal ($a_0=2$): 1, -1, 2, -2
Posibles raíces del polinomio: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 1/2, -1/2, 3/2, -3/2
El polinomio puede ser divisible por alguno de estos binomios: (x - 1), (x + 1), (x -2), (x + 2), (x + 3), (x - 3), (x + 6), (x - 6), (x + 1/2), (x - 1/2), (x + 3/2) ó (x - 3/2).

Elijamos uno, por ejemplo el **-2**:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -11 & 6 \\ -2 & & -4 & 14 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \mathbf{0} \end{array}$$

Resto: **0**, entonces **x=-2** es una raíz del polinomio.

El polinomio Cociente: $2x^2 - 7x + 3$. Este polinomio es de segundo grado, hay que factorearlo; podemos buscar las raíces con Gauss, usar la fórmula de Bäscara, o completar cuadrados. Voy a seguir con Gauss:

Posibles raíces: 1, -1, 3, -3, 2, -2, 1/2, -1/2, 3/2, -3/2.
Elijo dividir por (**x - 3**):

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -7 & 3 \\ 3 & & 6 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & \mathbf{0} \end{array}$$

Cociente: 2x – 1; Resto: 0, indica que **x=3** es otra raíz del polinomio.
Finalmente: $P(x)=2x^3 - 3x2 - 11x + 6 = (x + 2).(x - 3).(2x - 1)$

EJEMPLO 3: Coeficiente principal igual a "1".
El proceso se acorta.
$P(x)=x^4 - 15x^2 + 10x + 24$
a_0 =24: 1, -1, 2, - 2, 3, - 3, 4, - 4, 6, - 6, 8, - 8, 12, -12, 24, - 24
a_n=1: 1, -1

Posibles raíces: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12, 24, -24. Pruebo con (x + 1)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -15 & 10 & 24 \\ -1 & & -1 & 1 & 14 & -24 \\ \hline & 1 & -1 & -14 & 24 & \mathbf{0} \end{array}$$

0 Por ahora queda: $(x + 1).(x^3 - x^2 - 14x + 24)$

Ahora factoreo $x^3 - x^2 - 14x + 24$. Las posibles raíces son las mismas, porque el coeficiente del término principal es 1 y el término independiente es el mismo: 24. Pruebo con (x -2)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -14 & 24 \\ 2 & & 2 & 2 & -24 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -12 & \mathbf{0} \end{array}$$

0 Queda: (x + 1).(x - 2).(x^2 + x - 12)

Factoreo el último cociente, que es de segundo grado; sigo con Gauss. Las posibles raíces son los divisores de 12: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12. Pruebo con (x - 3):

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & \mathbf{0} \end{array}$$

Finalmente: P(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = (x + 1).(x - 2).(x - 3).(x + 4)

EJEMPLO 4: Factorear: x^3+4x^2+x-6
Los submúltiplos de -6 son: -1; 1; -2; 2; -3 y 3. Pruebo con (x-1)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Queda: $x^3+4x^2+x-6=\left(x^2+5x+6\right)\cdot\left(x-1\right)$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{-5\pm 1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\ x=-2\end{cases}$$

Finalmente: $x^3+4x^2+x-6=\left(x-1\right)\cdot\left(x+3\right)\cdot\left(x+2\right)$

Simplificación de expresiones algebraicas

a) Con monomios en ambos términos de una fracción:

EJEMPLO

1) $\dfrac{a^2b}{a}=ab$ 2) $\dfrac{x^2y^3z}{x^2y}=y^2\cdot z$ 3) $\dfrac{12mn^2}{4n}=3mn$

4) $\dfrac{3abx^3y}{9ab^2x^4}=\dfrac{y}{3bx}$ 5) $\dfrac{8xy^5z^{-1}}{24x^{-2}y^4z}=\dfrac{x^3y}{3z^2}$

b) Con binomios en ambos términos de una fracción:

EJEMPLO

$$1)\ \frac{(x+a)\cdot(x-2)}{(x-2)} = (x+a)$$

$$2)\ \frac{(x-1)\cdot(x+b)\cdot(x-c)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+b)\cdot(x-2)^2} = \frac{x-c}{x-2}$$

c) Con polinomios en ambos términos de una fracción:

EJEMPLO

$$1)\ \frac{x^4-x^3-2x^2}{x^2-2x} = \frac{x^2(x^2-x-2)}{x\cdot(x-2)} = \frac{x\cdot(x^2-x-2)}{(x-2)} = \frac{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}{(x-2)} = x(x+1) = x^2+$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$2)\ \frac{x^2-10x+25}{x^2-8x+15} = \frac{(x-5)^2}{(x-5)\cdot(x-3)} = \frac{x-5}{x-3}$$

$$x_{1,2} = \frac{10\pm\sqrt{100-100}}{2} = 5; \qquad x_{1,2} = \frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2} = \frac{8\pm2}{2} = \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases}$$

$$3)\ \frac{m^4\cdot n - m^2\cdot n^3}{m^2\cdot n + m\cdot n^2} = \frac{m^2\cdot n(m^2-n^2)}{m\cdot n\cdot(m+n)} = \frac{m\cdot(m-n)\cdot(m+n)}{(m+n)} = m\cdot(m-n) = m^2 - m\cdot n$$

$$4)\ \frac{x^3yz-2x^2yz+xyz}{x^3yz^3-x^2yz^3} = \frac{xyz(x^2-2x+1)}{x^2yz^3(x-1)} = \frac{(x-1)^2}{xz^2(x-1)} = \frac{x-1}{xz^2}$$

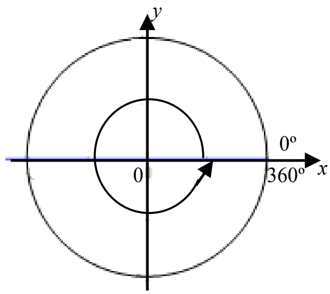
Segunda parte

Elementos de trigonometría

Las funciones trigonométricas son de gran utilidad en distintas disciplinas, desde las ingenierías hasta las ciencias médicas.

Por tal motivo las trataremos detalladamente.

Sistema sexagesimal de medición de ángulos



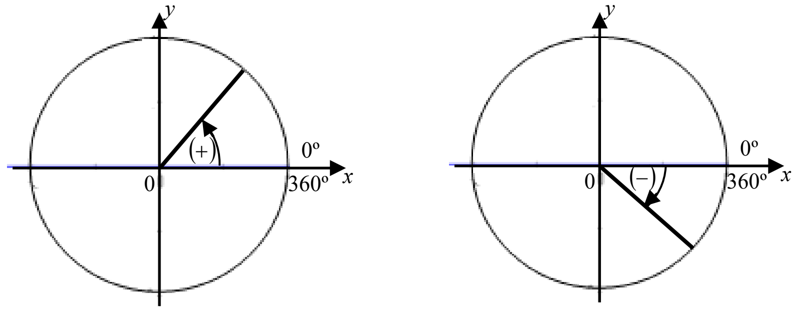
En este sistema se considera a la circunferencia dividida en 360 arcos iguales. Al ángulo central correspondiente a uno de estos arcos, se le asigna un valor llamado ***grado***.

Luego, la circunferencia mide ***360 grados*** y se simboliza: ***360º***. Un grado se divide en 60 partes iguales llamadas ***minutos*** y un minuto en 60 partes iguales llamadas ***segundos***.

Circunferencia= 360º; 1º=60´; 1´=60"

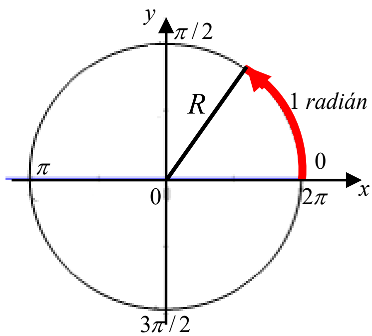
En trigonometría trabajaremos en un círculo "*C*", cuyo centro coincide con el origen de un sistema cartesiano.
Siempre comenzaremos a medir los ángulos en este círculo a partir del semieje positivo *OX*.

Se considera que los ángulos son de valores positivos (+), cuando el giro es ***anti-horario*** (contrario al giro de las agujas de un reloj). Por el contrario, si el giro es horario, los ángulos son negativos (-)



Sistema circular de medidas

La longitud de la circunferencia es: $L = 2\pi R$, siendo *R* su radio.
Entonces, en este sistema se considera a la circunferencia dividida en arcos iguales de 2π veces la longitud del radio (*R*). Al ángulo central correspondiente a uno de estos arcos, se le asigna un valor llamado ***radián***.
Luego, la ***circunferencia*** mide 2π ***radianes***.



Funciones trigonométricas.

Definiciones

Consideremos un círculo "*C*" y un punto *P(x, y)* que se mueve sobre la circunferencia y determina en un instante dado, un ángulo central que llamaremos α.
Es decir que relacionado con el ángulo α hay tres elementos geométricos:

x: abscisa del punto *P*
y: ordenada del punto *P*
R: Radio de la circunferencia *C*.

Podemos entonces plantear 6 relaciones con estos elementos:

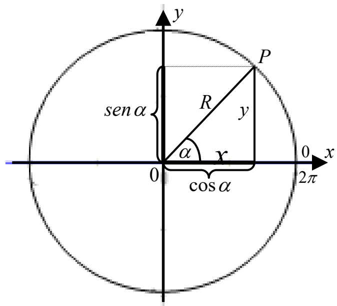
$\frac{y}{R}$; $\frac{x}{R}$; $\frac{y}{x}$ y sus recíprocos: $\frac{R}{y}$; $\frac{R}{x}$; $\frac{x}{y}$

Con las relaciones anteriores definiremos las funciones, aunque no de una manera formal:

DEFINICIONES:

$$sen\alpha = \frac{y}{R}, \frac{ordenadas}{Radio}; cos\ \alpha = \frac{x}{R}, \frac{abscisas}{Radio}$$

$$tan\ \alpha = \frac{y}{x}, \frac{ordenadas}{abscisas}$$



Y sus recíprocos

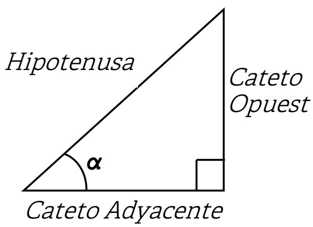
$$\cos ec\,\alpha = \frac{R}{y}, \ \frac{Radio}{ordenadas}; \quad \sec\alpha = \frac{x}{R}, \ \frac{Radio}{abscisas}; \quad \cot an\,\alpha = \frac{y}{x}, \ \frac{abscisas}{ordenadas}$$

Otra forma de definir las funciones trigonométricas es partiendo de elementos de un triángulo rectángulo.

$$sen\,\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{Cateto\ \ Adyacente}{Hipotenusa}$$

$$\tan\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ \ Adyacente}$$

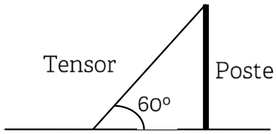


Los recíprocos se obtienen invirtiendo los elementos de las fracciones.

EJEMPLO

Resuelve las situaciones problemáticas, aplicando relaciones trigonométricas.

1) Un poste eléctrico de 10 m de altura debe sujetarse con un tensor desde su extremo superior, hasta el suelo. Si el tensor forma un ángulo de 60º con el suelo, ¿qué longitud tiene dicho tensor?

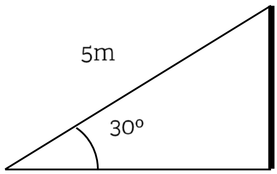


$$sen\,60º = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{10}{c} \Rightarrow$$

$$c = \frac{10}{sen\,60º} = \frac{10}{0{,}866} = 11{,}547$$

$Longitud\ del\ tensor: c = 11{,}55m$

2) Una escalera de un edificio tiene un desarrollo de 5 m y un ángulo de inclinación de 30º, como indica la figura. ¿A qué altura llega?

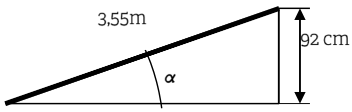


$$sen\,30º = \frac{Cateto\,Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{x}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 \cdot sen\,30º = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$$

$Llega\ a\ la\ altura\ de: 2{,}5m$

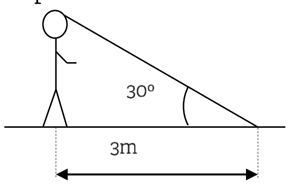
3) Se debe colocar una rampa de 3,55 m de longitud para facilitar el acceso a un edificio cuya entrada está a 92 cm de altura. ¿Qué ángulo forma la rampa con el suelo?



$$sen\,\alpha = \frac{Cateto\,Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{0{,}92}{3{,}55} = 0{,}259 \Rightarrow$$

$$sen\,\alpha = 0{,}259 \Rightarrow \alpha = arcsen\,0{,}259 \cong 15º$$

4) La sombra que proyecta una persona sobre el suelo es de 3,00 m, formando un ángulo de elevación de 30º. ¿Qué altura tiene esa persona?



$$tg30^o = \frac{CatetoOpuesto}{CatetoAdyacente} = \frac{h}{3}$$

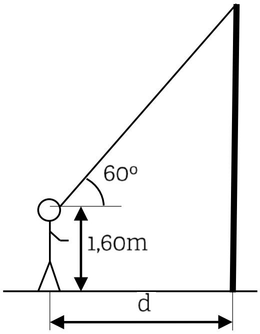
$$h = 3 \cdot tg30^o = 3 \cdot tg30^o$$

$$= 3 \cdot 0{,}577$$

$$= 1{,}73$$

$Laalturadelapersonaesde1{,}73m$

5) Joaquín, de 1,60m de altura (del suelo a los ojos), observa un pájaro posado sobre la punta de un poste; el ángulo de inclinación de su mirada es de 60º y la altura del poste de 8,60 m. ¿A qué distancia (*d*) está Joaquín del poste?



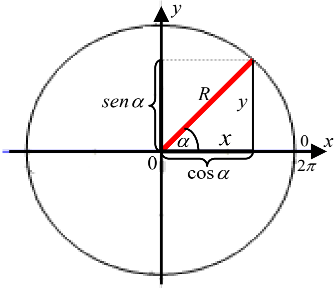
$$tg60^o = \frac{CatetoOpuesto}{CatetoAdyacente} = \frac{8{,}60 - 1{,}60}{d}$$

$$d = \frac{8{,}60 - 1{,}60}{tg60^o} = \frac{7}{1{,}73} = 4{,}04$$

La distancia de Joaquín al poste es de 4,04m

Signos de las funciones trigonométricas

En el primer cuadrante (I)



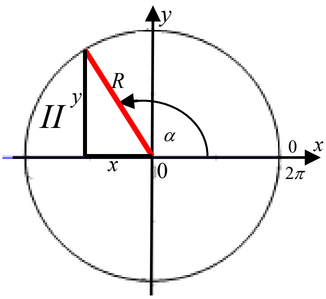
$R\,(+),\quad x\,(+),\quad y\,(+)$

$$sen\,\alpha = \frac{y}{R}\,(+)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}\,(+)$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}\,(+)$$

En el segundo cuadrante (II)



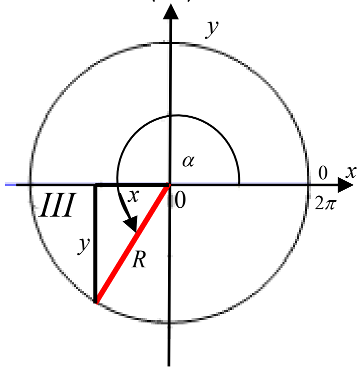
$R\,(+),\quad x\,(-),\quad y\,(+)$

$$sen\,\alpha = \frac{y}{R}\,(+)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}\,(-)$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}\,(-)$$

En el tercer cuadrante (III)



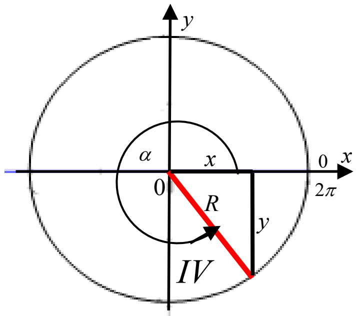
$$R\ (+),\quad x\ (-),\quad y\ (-)$$

$$sen\,\alpha = \frac{y}{R}\ (-)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}\ (-)$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}\ (+)$$

En el cuarto cuadrante (IV)



$$R\ (+),\quad x\ (+),\quad y\ (-)$$

$$sen\,\alpha = \frac{y}{R}\ (-)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}\ (+)$$

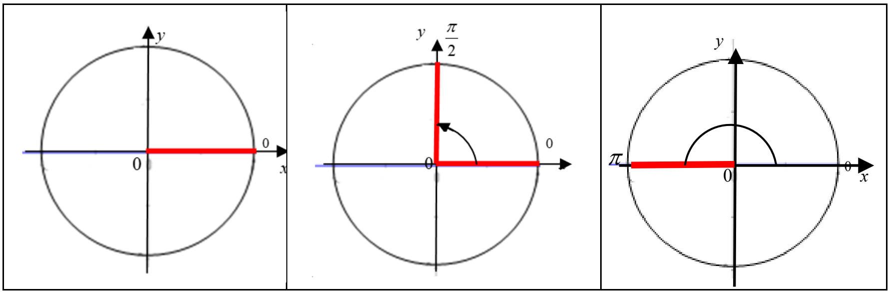
$$\tan\alpha = \frac{y}{x}\ (-)$$

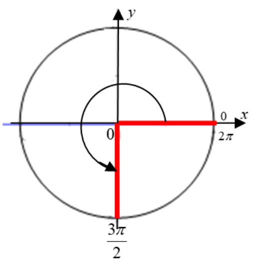
Cuadro resumen

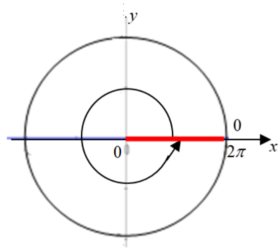
Cuadrante	Ángulo	sen α	cos α	tg α	cotg α	sce α	cosec α
I	0< α < π/2 0º< α <90º	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)
II	π/2< α < π 90º< α <180º	(+)	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)
III	π< α < 3π/2 180º< α <270º	(-)	(-)	(+)	(+)	(-)	(-)
IV	3π/2< α <2π 270º< α <360º	(-)	(+)	(-)	(-)	(+)	(-)

Ángulos axiales y ángulos notables

Ángulos axiales son aquellos que en una circunferencia *C* su lado terminal coincide con uno de los semiejes del sistema coordenado.
Ejemplos en el intervalo $[0,\ 2\pi]$





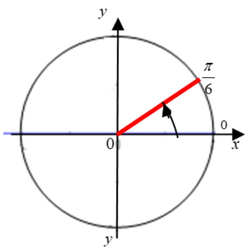


Ángulos notables son aquellos que se usan con mayor frecuencia. También se consideran notables sus múltiplos.

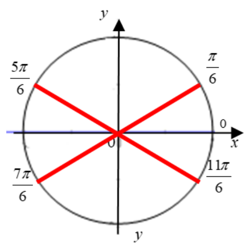
EJEMPLO

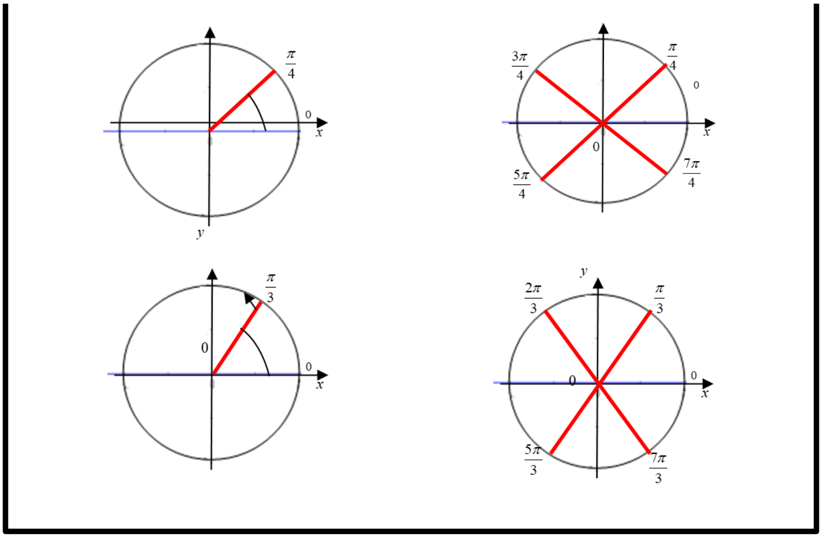
en el intervalo $[0,\ 2\pi]$.

Ángulo notable



Múltiplos más utilizados





Valores axiales y notables de las funciones trigonométricas

Son los valores numéricos que toman las funciones trigonométricas en los ángulos axiales y notables del primer cuadrante.

Ángulo	*0*	*π/6*	*π/4*	*π/3*	*π/2*
sen α	*0*	*1/2*	*√2/2*	*√3/2*	*1*
cos α	*1*	*√3/2*	*√2/2*	*1/2*	*0*
tg α	*0*	*√3/3*	*1*	*√3*	*∞*
cotg α	*∞*	*√3*	*1*	*√3/3*	*0*
sec α	*1*	*2√3/3*	*√2*	*2*	*∞*
cosec α	*∞*	*2*	*√2*	*2√3/3*	*1*

Reducción de ángulos mayores a un giro

En los casos que los ángulos sean mayores a un giro completo (*2π* o *360º*), se los debe reducir a su correspondiente, menor que un giro, siguiendo el procedimiento siguiente.

$$\alpha > 2\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} = C + \widehat{\beta}$$

$$\alpha > 360 \Rightarrow \frac{\alpha}{360^{\circ}} = C + \widehat{\beta}$$

; siendo ***β*** el resto de la división, que coincide con el ángulo reducido.

EJEMPLO

1) $815^{\circ} \Rightarrow 815^{\circ} \,|\, 360^{\circ}$; $\boxed{95^{\circ}}\ 2 \quad \Rightarrow \beta = 95^{\circ}$

2) $\alpha = \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{\frac{7\pi}{2}}{2\pi} = \frac{7\pi}{4\pi} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7 \,|\, 4 \\ \boxed{3}\ 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = \frac{3\pi}{2}$

3) $\alpha = 630^{\circ} \Rightarrow 630^{\circ} \,|\, 360^{\circ}$; $\boxed{270^{\circ}}\ 1 \quad \Rightarrow \beta = 270^{\circ}$

4) $\alpha = \frac{19\pi}{3} \Rightarrow \frac{\frac{19\pi}{3}}{2\pi} = \frac{19\pi}{6\pi} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 19 \,|\, 6 \\ \boxed{1}\ 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$

5) $\alpha = -\frac{21\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\frac{21\pi}{2}}{2\pi} = \frac{-21\pi}{4\pi} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 21 \,|\, 4 \\ \boxed{1}\ 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{2}$

6) $\alpha = -2905^{\circ} \Rightarrow 2905^{\circ} \,|\, 360^{\circ}$; $\boxed{25^{\circ}}\ 8 \quad \Rightarrow \beta = -25^{\circ}$

Identidades y fórmulas trigonométricas que se utilizan

Identidad Trigonométrica fundamental: $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ de esta se deducen:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad 1 + tg^2 x = \sec^2 x$ $\quad 1 + cotg^2 x = co\sec^2 x$

$sen\, x . \csc x = 1$ $\quad \cos x . \sec x = 1$ $\quad tg\, x \cot g\, x = 1$

Identidades de suma y diferencia de ángulos:

$sen(u+v) = sen\, u . \cos v + \cos u . sen\, v$ $\quad sen(u-v) = sen\, u . \cos v - \cos u . sen\, v$

$\cos(u+v) = \cos u . \cos v - sen\, u . sen\, v$ $\quad \cos(u-v) = \cos u . \cos v + sen\, u . sen\, v$

$tg(u+v) = \dfrac{tg\, u + tg\, v}{1 - tgu . tg\, v}$ $\quad tg(u-v) = \dfrac{tg\, u - tg\, v}{1 + tgu . tg\, v}$

Identidades de ángulos dobles y medios:

$sen 2x = 2\, sen\, x . \cos x$ $\quad sen^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ $\quad cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 + \cos x}{2}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ $\quad cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ $\quad tg\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos x}{sen\, x}$

$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$ $\quad tg^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ $\quad tg\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{sen\, x}{1 + \cos x}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $\quad sen^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos x}{2}$ $\quad tg\, 2x = \dfrac{2\, tg\, x}{1 - tg^2 x}$

Identidades de la suma y diferencia de senos y cosenos:

$$sen\,\alpha - sen\,\beta = 2 \cdot sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) . \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\cos\,\alpha - \cos\,\beta = -2 \cdot sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) . sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

Identidades del producto, suma y diferencia de senos y cosenos:

$\mathrm{sen\,u} . \mathrm{cos\,v} = \dfrac{1}{2}\left[sen(u+v) + sen(u-v)\right]$ $\quad \mathrm{cos\,u} . \mathrm{cos\,v} = \dfrac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]$

$\mathrm{cos\,u} . sen\,\mathrm{v} = \dfrac{1}{2}\left[sen(u+v) - sen(u-v)\right]$ $\quad \mathrm{sen\,u} . sen\,\mathrm{v} = \dfrac{1}{2}\left[\cos(u-v) - \cos(u+v)\right]$

Ecuaciones trigonométricas

Ecuaciones trigonométricas básicas

Ecuaciones Básicas		Solución en el Intervalo $[0,2\pi]$	Solución general
$sen\alpha = 1$	$\Rightarrow$	$\left\{\alpha = \frac{\pi}{2}\right.$	$\alpha = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}, k \in Z$
$tg\alpha = 1$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} \\ \alpha = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$	$\alpha = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right\}, k \in Z$
$sen\alpha = \frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$	$\alpha = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}, k \in Z$
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \alpha = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$	$\alpha = \left\{\frac{\pm\pi}{6} + 2k\pi\right\}, k \in Z$
$sen\alpha = -1$	$\Rightarrow$	$\alpha = \frac{3\pi}{2}$	$\alpha = \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}, k \in Z$
$\cos\alpha = 0$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$	$\alpha = \left\{\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right\}, k \in Z$
$tg\alpha = 0$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \pi \end{cases}$	$\alpha = \{0 + k\pi\}, k \in Z$
$\sec\alpha = 1$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 2\pi \end{cases}$	$\alpha = \{0 + 2k\pi\}, k \in Z$
$\cos e\, c\alpha = 1$	$\Rightarrow$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\alpha = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}, k \in Z$
$\cot g\,\alpha = 0$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$	$\alpha = \left\{\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right\}, k \in Z$

Tercera parte

Campos numéricos

Estás leyendo ahora mismo estas palabras. Tienes un sentido preciso del "ahora", al igual que del "pasado" y del "futuro". Tenemos una percepción muy clara del "flujo del tiempo". Percibimos el tiempo como un continuo: lo que separa dos instantes de tiempo es [. . .] tiempo. Dado un pequeño intervalo de tiempo, digamos un segundo, siempre podemos concebir otro intervalo más pequeño todavía, medio segundo o una cienbillonésima parte de un segundo. ¿Has pensado alguna vez hasta dónde es posible dividir el tiempo? Si aceptamos que el "instante" es lo que no tiene duración, parece difícil aceptar que el tiempo esté formado por instantes. ¿Debemos considerar entonces que hay una unidad mínima de tiempo, todo lo pequeña que queramos, pero que no se reduce a un instante? Estarás de acuerdo en que esa unidad mínima de tiempo sería algo así como una unidad de tiempo "infinitesimal". ¿Cuántas unidades infinitesimales de tiempo caben en un minuto? ¿Un número finito? ¿Una cantidad infinita?

En el párrafo anterior podemos cambiar la palabra "tiempo" por "espacio" e "instante" por "punto" y llegaremos a los problemas derivados de la "infinita divisibilidad" del espacio. Tiempo y espacio son ejemplos de "continuo". Una entidad continua, un continuo, es lo que no está roto ni separado ni tiene huecos, lo que puede ser indefinidamente dividido sin que pierda su naturaleza. Por ejemplo, un volumen de líquido, un segmento, un movimiento o, los ejemplos más inmediatos, el espacio y el tiempo[1].

---

1 PÉREZ GONZÁLEZ (2015). ***Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. Cap. 5.***

Números reales

La Matemática es una ciencia que trabaja con números; existen diversos conjuntos numéricos, pero a nosotros nos interesa estudiar el conjunto de los Números Reales, pues a estos se circunscriben la mayoría de los problemas y relaciones que se analizarán en las asignaturas que utilizan matemática en las carreras universitarias.

El ***conjunto*** de los ***números reales (R)*** es ***infinito*** (está compuesto por infinitos elementos) y ***ordenado*** (existe un orden entre los distintos números); a su vez, está compuesto por otros subconjuntos numéricos. Veamos el siguiente cuadro:

$$REALES(\Re)\begin{cases} Racionales(Q)\begin{cases} Enteros(Z)\begin{cases} Naturales(N) \\ 0(Cero) \\ OpuestosdelosNaturales(-N) \end{cases} \\ FraccionariosPuros(F) \end{cases} \\ Irracionales(I) \end{cases}$$

Cada uno de estos subconjuntos que integran el cuadro, a excepción del cero, también tiene infinitos elementos.

Naturales: N={1; 2; 3; 4; 5; ...; n; n+1; ...}

Opuestos de los Naturales: -N={ ...; -5; -4; -3; -2; -1}

Enteros: Z={...; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; ...; n; n+1; ...}

Fraccionarios Puros: F. Están formados por el cociente entre dos números enteros primos entre sí, distintos de cero, con el denominador distinto de uno:

EJEMPLO

... $\frac{3}{5};\frac{-1}{2};\frac{2}{3};\frac{-5}{7};\frac{4}{9};\frac{1}{3};\frac{-2}{5}$ ..., también es infinito.

La unión de los subconjuntos *Z* (Enteros) y *F* (Fraccionarios), es el conjunto de los números Racionales (*Q*) , también es infinito.

El conjunto de los Irracionales (*I*), está formado por números que no pueden ser representados por fracciones y tampoco son enteros, también es infinito, algunos de estos son los siguientes.

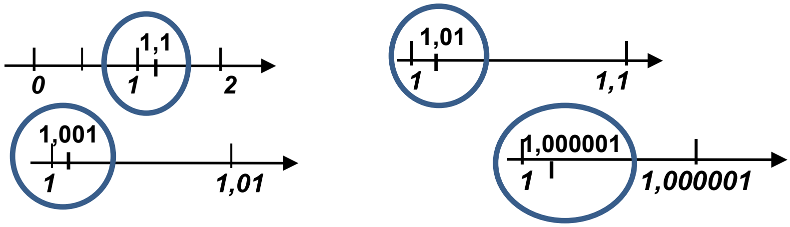
$$\sqrt{2}=1,4142135...;\quad e=2,7182...;\quad \pi=3,1415926...;$$

$$\sqrt[3]{-5}=-1,70997594...;\quad \sqrt{3}=1,7320508...;\quad \sqrt[3]{17}=2,571281590658...$$

La unión de los conjuntos Q u I, es el conjunto de los números Reales $\Re$ Este conjunto infinito es además, llamado conjunto compacto, puesto que entre dos números $\Re$ distintos, hay "siempre" otro $\Re$, tal propiedad no se cumple en los subconjuntos nombrados.

A modo de EJEMPLO:

Entre el 1 y el 2, hay infinitos números reales: el 1,1, el 1,2; 1,3; 1,4, etc. Si hacemos un ***zoom*** y acercamos la imagen sucesivamente, vemos que podemos intercalar indefinidamente números reales.



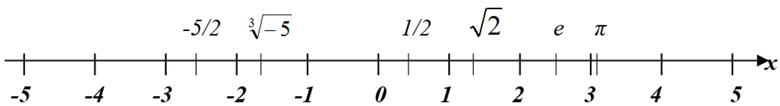
Si bien esta no es una prueba matemática rigurosa, sirve para darnos una idea de la ***imposibilidad*** que hay de nombrar al número real inmediatamente próximo de uno dado.

Al conjunto $\Re$, se lo representa gráficamente por una recta orientada, llamado ***Eje Real***, que está compuesto en dos semiejes unidos por el cero.

A la derecha del cero se representan los números reales positivos $\Re(+)$ y a la izquierda, los números reales negativos $\Re(-)$.

Si en esta recta marcamos un segmento cualquiera y lo llamamos ***unidad***, podemos ubicar hacia la derecha del cero todas las unidades, que constituyen el conjunto de los números Naturales y a la izquierda los Opuestos de los Naturales.

Posteriormente, se puede graficar cualquier número real en ella.



Vamos a obviar las *definiciones* axiomáticas de los números reales y solo enunciaremos la existencia de:

Elemento Neutro de la Suma: **0** (cero): $Si\ a \in \Re \Rightarrow a + 0 = a$
Elemento Neutro del producto: **1** (uno): $Si\ b \in \Re \Rightarrow b.1 = b$

Veremos a continuación algunos conceptos que se deben dominar en este nivel de estudio y que no siempre están expuestos con claridad.

No se puede dividir por cero

Cuando se divide cualquier par de números reales: ***a≠ 0***, en ***b ≠ 0***, el resultado es otro número real:

$$a \neq 0;\ b \neq 0 \therefore \frac{a}{b} = c, \qquad c \in \Re$$

Ahora bien, cuando el denominador de una fracción es cero, siendo el numerador distinto de cero, todo cambia.

$$a \neq 0;\ b = 0 \therefore \frac{a}{b}\ \ NO\ \ EXISTE$$

Tratemos de entenderlo con un ejemplo, que no constituye una demostración rigurosa.

Sabemos que $\frac{1}{0}$,

no se puede realizar, pero si reemplazamos el denominador por otro número cercano a cero, por ejemplo 0,1 y dividamos:

$\frac{1}{0,1} = 10$

Si dividimos en 0,01, todavía más cercano a cero: $\frac{1}{0,01} = 100$

Si dividimos en 0,001, aún más cercano a cero: $\frac{1}{0,001} = 1.000$

....

....

Si dividimos en 0,000...1, muy cercano a cero: $\frac{1}{\underbrace{0,00...1}_{n}} = 1\underbrace{00\ldots0}_{n}$

Fuimos dividiendo sucesivamente por números cada vez más cercanos a cero, sin tomar ese valor y observamos que el resultado es cada vez más grande (10; 100; 1.000; ...1000...0; etc.); esto implica que cuando dividimos 1 (o cualquier otro número distinto de cero), en un número ***muy cercano a cero*** el resultado es muy grande: entonces ¿qué pasa si el denominador ***es cero***? no se puede dividir en cero, pues tiende a infinito ∞

División por infinito

$$\forall a \in \Re; \quad \frac{a}{\infty} = 0$$

Razonando de manera similar a la anterior:

$$\frac{1}{10}=0{,}1; \qquad \frac{1}{100}=0{,}01; \qquad \frac{1}{1.000}=0{,}001;$$

$$\frac{1}{10.000}=0{,}0001; \qquad \frac{1}{\underbrace{1000...0}_{n}}=0,\underbrace{000...01}_{n};\ etc.\ \therefore\ \frac{1}{\infty}=0$$

Redondeo *de un número*

En diversas ocasiones aparecen números que tienen muchas cifras decimales, dificultando su apreciación. Por tal circunstancia es adecuado ***redondear*** el número, acotando la cantidad de cifras decimales a las necesarias para la precisión requerida por este.

Se procede de la siguiente manera.

EJEMPLO

Redondear los siguientes números a dos cifras decimales.

1) $234,\overset{\frown}{45}\,89721985$

Las cifras que están a continuación de la segunda cifra decimal, son: 89721985, para redondear se considera la tercera cifra: 8, que está más cerca de 10; por lo tanto, el redondeo será llevando la segunda cifra a una unidad mayor:

$$234{,}4589721985 = 234{,}46$$

2) $29,\overset{\frown}{36}\,416972$

Las cifras que están a continuación de la segunda cifra decimal, son: 416972, para redondear se considera la tercera cifra: 4, que está más cerca de 0; por lo tanto, el redondeo será dejando la segunda cifra sin variación:

$$29,\overset{\frown}{36}\,416972 = 29{,}36$$

3) $-\ 15,\overset{\frown}{83}\,50121985$

Las cifras que están a continuación de la segunda cifra decimal, son: 50121985, para redondear se considera la tercera cifra: 5, que no decide si está más cerca de 10 o de 0; por lo tanto, debemos analizar la cifra siguiente, que es: *1*, está más cerca de 0, por lo que el redondeo será dejando la segunda cifra sin variación:

$$-15{,}8350121985 = -15{,}835$$

Notaciones decimal y fraccionaria

Sabemos que todo número fraccionario puede ser representado mediante notación decimal, simplemente dividiendo el numerador en el denominador:

EJEMPLO

$$\frac{3}{4} = 0{,}75; \frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots = 0{,}\hat{6}$$

Pero el proceso inverso no es siempre posible; ***no todo número decimal se puede transformar en una fracción***. ¿Por qué?; ¿cuándo se puede y cuándo no se puede?

No todo número decimal se puede transformar en fracción porque en la representación decimal se ubican los *fraccionarios puros* y los *irracionales*; estos últimos no pueden ser reducidos a una fracción.

Un número decimal *se puede transformar en fracción cuando sus cifras decimales son periódicas.*

EJEMPLO

$$0{,}75000 = 0{,}75 = \frac{3}{4}; \qquad 0{,}6666\ldots = 0{,}\hat{6} = \frac{2}{3}$$

Un número decimal no se puede transformar en fracción cuando sus cifras decimales son infinitas y No periódicas; en ese caso se trata de un número irracional:

EJEMPLO

$$1{,}4142135\ldots = \sqrt{2}; \qquad 2{,}7182\ldots = e$$

$$3{,}1415926\ldots = \pi; \qquad -1{,}70997594\ldots = \sqrt[3]{-5}$$

Existe un método para transformar números decimales periódicos en fracciones, pero no lo expondremos acá.

Notación científica

En muchas ciencias se utilizan con frecuencia expresiones numéricas en notación científica. Generalmente se expresan de esta manera las magnitudes muy grandes o muy pequeñas.

La ***notación científica*** utiliza potencias de 10. De esta manera se minimizan los errores de interpretación.

Cuando un número es grande, se lo expresa con la primera cifra seguida de los decimales necesarios, multiplicado por 10 elevado a una potencia (positiva) correspondientes a la cantidad de cifras que se corrió la coma hacia la izquierda.

EJEMPLO

$1)2.000 = 2 \cdot 1.000 = 3 \cdot 10^3;$ $\quad 2)31.740 = 3{,}174 \cdot 10.000 = 3{,}17 \cdot 10^4$

$3) - 4.250.000 = -4{,}25 \cdot 10^6;$ $\quad 4)41.845.291 = 4{,}18 \cdot 10^7$

Cuando un número es muy pequeño, se lo expresa con la primera cifra entera seguida de los decimales necesarios, multiplicado por 10 elevado a una potencia (negativa) correspondientes a la cantidad de cifras que se corrió la coma hacia la derecha.

EJEMPLO

$$1)0{,}000075 = 7{,}5 \cdot 0{,}00001 = \frac{7{,}5}{100.000} = \frac{7{,}5}{10^5} = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$$

$$2) - 0{,}0003564 = -3{,}56 \cdot 10^{-4}$$

Entre los Reales, se pueden realizar diversas operaciones, que se categorizan por ***ecuaciones*** e ***inecuaciones***.

En cada caso, se deben atener a ciertas reglas de transformaciones.

Ecuaciones

Definición: Las ***Ecuaciones*** son ***igualdades*** entre dos expresiones algebraicas.

EJEMPLO

$a) x^3 + 2x^2 + x = 0$ $\qquad$ $b) \dfrac{2x^2 + 2}{x} = 4x$

$c) x + 1 = \dfrac{x^2 - 1}{x + 3}$ $\qquad$ $d) x^2 + 2 = -3$

Propiedades de las Ecuaciones:

$Sia, byc \in \Re, se\ cumplen:$

1) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ $\qquad$ 2) $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c; sic \neq 0$

3) $(a \pm b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $\qquad$ 4) $a + 0 = a; 0: Elemento\ neutro\ aditivo$

5) $a \cdot 1 = a; 1: Elemento\ neutro\ multiplicativo.$

6) $\forall a \in \Re, \exists \dfrac{(-a)}{a} + (-a) = 0$ $\qquad$ 7) $a \cdot 0 = 0$

8) $a \cdot (-1) = -a$ $\qquad$ 9) $-(-a) = a$

10) $a \cdot (-b) = -a \cdot b$ $\qquad$ 11) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

12) $Sia \neq 0; \exists a^{-1} = \dfrac{\frac{1}{a}}{a} \cdot a^{-1} = 1$

13) $Siayb \in \Re \rightleftarrows\rightleftarrows yb \neq 0; \therefore \dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$

Desigualdades

Definición: Las ***Desigualdades*** son ***desigualdades*** entre dos expresiones algebraicas.

Como ya se dijo, el conjunto r es un cuerpo ordenado, las desigualdades permiten establecer estas ***relaciones de orden***, que se simbolizan de la manera siguiente.

$\geq: mayor\ o\ igual\ que$ $\qquad$ $>: mayor\ que$

$\leq: menor\ o\ igual\ que$ $\qquad$ $<: menorque$

Desigualdades simples:

1) Se cumple ***solo una*** de las siguientes relaciones: $a < b$; ó $a = b$; ó $a > b$

2) $Si\ a > b\ \ y\ \ b > c \Rightarrow a > c$

3) $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$; $\quad a \geq b \Rightarrow a \pm c \geq b \pm c$

$a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$; $\quad a \leq b \Rightarrow a \pm c \leq b \pm c$

Si a ambos miembros de una desigualdad se le suma, o resta, un mismo número, la desigualdad *no altera*.

4) $a > b\ \ y\ \ c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$; $\quad a \geq b\ \ y\ \ c > 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

$a < b\ \ y\ \ c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$; $\quad a \leq b\ \ y\ \ c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

Si a ambos miembros de una desigualdad se los multiplica, o divide, por un *número positivo* (+), la desigualdad *no altera*.

5) $a > b\ \ y\ \ c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$; $\quad a \geq b\ \ y\ \ c < 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

$a < b\ \ y\ \ c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$; $\quad a \leq b\ \ y\ \ c < 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

Si a ambos miembros de una desigualdad se lo multiplica, o divide, por un *número negativo* (-), la desigualdad se *invierte*.

6) $\forall a \in \Re\ \ y\ \ n\ \ par,\ \ a^n \geq 0$

Todo número real elevado a una potencia par, da como resultado un número mayor o igual que cero.

7) $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$; $\quad a < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 0$

Para todo número real, distinto de cero, su recíproco mantiene el signo.

> **Importante**: Importante: "Si a ambos miembros de una desigualdad se los multiplica o divide por un número menor que cero, la desigualdad se invierte".

Desigualdades dobles o continuas

son de la forma:

$a < x < b \Rightarrow \{ y$ $\qquad\qquad$ $a \leq x \leq b \Rightarrow \{ y$

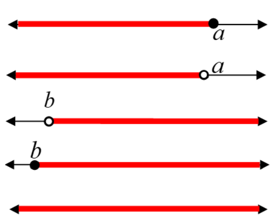
Importante: El sentido de las desigualdades es $a < x \leq b$; *al revés $a > x \geq b$, No es adecuado.*

Generalmente no se trabaja con el conjunto completo de los números reales, sino con porciones de este, en los cuales nos interesa realizar cualquier tipo de análisis matemático. Estas porciones de números reales reciben un nombre especial.

Intervalos

Definición: Un intervalo es un subconjunto de los *R*, cuyos elementos están entre dos números reales ***a*** y ***b***, tal que $a < b$.
Se dice que ***a*** y ***b*** son los extremos del intervalo.
En el siguiente cuadro se resumen los distintos tipos de intervalos, con sus respectivas representaciones.

Cuadro resumen de Intervalos

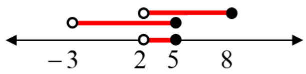
Nombre	Notación de Intervalo	Notación Conjuntista	Gráfico
Intervalo abierto	*(a, b)*	$\{x \in \Re / a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	*[a, b]*	$\{x \in \Re / a \leq x \leq b\}$	
Intervalos Semiabiertos	*[a, b)* *(a, b]*	$\{x \in \Re / a \leq x < b\}$ $\{x \in \Re / a < x \leq b\}$	
Intervalos Infinitos	$(-\infty, a]$ $(-\infty, a)$ (b, ∞) $[b, \infty)$ $(-\infty, \infty)$	$\{x \in \Re / x \leq a\}$ $\{x \in \Re / x < a\}$ $\{x \in \Re / x > b\}$ $\{x \in \Re / x \geq b\}$ $\{x / x \in \Re\}$	

Unión de intervalos: U

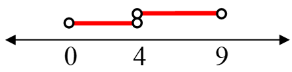
El conjunto solución está compuesto por los elementos comunes y no comunes a los intervalos a unir.

EJEMPLO

1) $(-3;\,5]\cap(2;\,8]=(2;\,5]$



2) $(0;\,4)\cup(4;\,9)=\varnothing$



Importante: Cuando se debe cumplir una **u** otra condición, hay que **UNIR** los intervalos..

EJEMPLO

Encontrar los valores reales de ***x*** que son mayores que ***1*** o menores o iguales que ***4***.

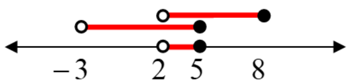
$x>1\wedge x\leq 4\Rightarrow(1,\,\infty)\cap(-\infty;\,4]=(1;\,4]$

Intersección de intervalos: $\cap$

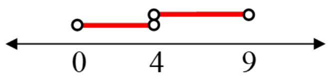
El conjunto solución está compuesto solo por los elementos comunes a los intervalos.

EJEMPLO

1) $(-3;\,5]\cap(2;\,8]=(2;\,5]$



2) $(0;\,4)\cup(4;\,9)=\varnothing$



Importante: Cuando se debe cumplir una **y** otra condición, hay que **intersectar** los intervalos.

EJEMPLO

$x > 1 \wedge x \leq 4 \Rightarrow (1, \infty) \cap (-\infty;\ 4] = (1;\ 4]$

Inecuaciones en una variable real

Definición: Las *Inecuaciones* son ***desigualdades*** entre dos expresiones algebraicas. La condición en este caso es que interviene solo una variable. Se presenta a continuación un cuadro con las inecuaciones que más se estudian y que analizaremos en este apartado.

Inecuaciones

- ***Enteras:***
  - ***Lineales:*** $a)\ 2x+3 \leq 6x-1;$ $\quad b)\ \dfrac{x+1}{5}+\dfrac{x}{6} > \dfrac{13}{10}$
  - ***Cuadáticas:*** $c)\ x^2+2x+1>0$ $\quad d)\ x^2-x \leq 2$
- ***Fraccionarias:*** $e)\ \dfrac{x+8}{x-1}-4 \leq 0$ $\quad f)\ \dfrac{x^2}{x-3} \geq x+1$
- ***Continuas o Dobles:*** $g)\ -3 \leq 4x-9 < 11$ $\quad h)\ 2x-4 \leq 6-7x \leq 3x-2$

El conjunto solución (*Cs*) de una inecuación en una variable real "*x*" es el conjunto de todos los valores reales que puede tomar "*x*" para los cuales se cumple la desigualdad. Para obtener ese Conjunto Solución *Cs*, es necesario realizar transformaciones matemáticas (aplicando propiedades de desigualdades), para llevar la inecuación a una forma tal que pueda representarse mediante un intervalo o unión de intervalos.

Inecuaciones Lineales:

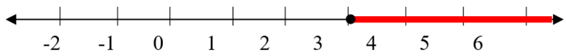
Son ***desigualdades*** entre dos expresiones algebraicas, donde la variable *x* aparece elevada a la primera potencia.

Para encontrar el Conjunto solución de estas inecuaciones, debemos agrupar los términos que contienen ***x***, en el primer miembro y el o los números en el segundo miembro.

EJEMPLO

$a)\ 2x+3\le 6x-1 \Rightarrow -4x\le -4 \Rightarrow x\ge 1 \therefore Cs=[1,\ \infty)$

$b)\ \frac{x+1}{5}+\frac{x}{6}>\frac{13}{10} \Rightarrow \frac{6x+6+5x}{30}>\frac{13}{10} \Rightarrow 11x+6>39 \Rightarrow x>\frac{33}{11} \Rightarrow x>3 \therefore Cs=(3,\ \infty)$

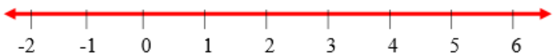


Inecuaciones Cuadráticas:

La variable *x* aparece elevada al cuadrado.

EJEMPLO

$c)\ x^2+2x+1\ge 0 \Rightarrow (x+1)^2\ge 0 \Rightarrow \forall x\in \Re; \qquad Cs=(-\infty,\infty)$



$d)\ x^2-x\le 2 \Rightarrow x^2-x-2\le 0 \therefore x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$

$$(x-2)\cdot(x+1)\le 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (x-2\le 0 \Rightarrow x\le 2)\wedge(x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -1) \\ \vee \\ (x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 2)\wedge(x+1\le 0 \Rightarrow x\le -1) \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\in(-\infty,\ 2]\wedge x\in[-1,\ \infty) \\ \cup \\ x\in[2,\ \infty)\wedge x\in(-\infty,\ -1] \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow [-1,\ 2]\cup\varnothing=[-1,\ 2] \therefore Cs=[-1,\ 2]$$

Otro EJEMPLO: $e)\ x^2+1<0 \Rightarrow x^2<-1\notin \Re \therefore Cs=\varnothing$

Inecuaciones Fraccionarias:

La variable *x* aparece en el denominador, también puede aparecer en el numerador.

EJEMPLO

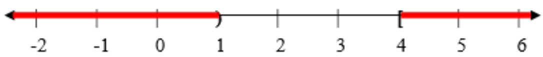
$f)\ \dfrac{x+8}{x-1} \leq 4$

Se debe tener en cuenta que el denominador de toda fracción debe ser distinto de cero. Luego, es conveniente llevar la expresión a una inecuación homogénea (que el segundo miembro sea 0), y operar hasta despejar *x*.

$$\frac{x+8}{x-1} - 4 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+8-4x+4}{x-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-3x+12}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{-3x+12}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (-3x+12 \leq 0 \Rightarrow x \geq 4) \wedge (x-1>0 \Rightarrow x>1) \\ \vee \\ (-3x+12 \geq 0 \Rightarrow x \leq 4) \wedge (x-1<0 \Rightarrow x<1) \end{cases}$$

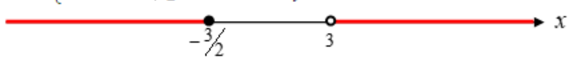
$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x \in [4, \infty) \wedge x \in (1, \infty) \\ \cup \\ x \in (-\infty, 4] \wedge x \in (-\infty, 1) \end{cases}\right\} (-\infty, 1) \cup [4, \infty) \therefore Cs = (-\infty, 1) \cup [4, \infty)$$



$$g)\ \frac{x^2}{x-3} \geq x+1 \Rightarrow \frac{x^2}{x-3} - x - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-x^2+3x-x+3}{x-3} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x+3}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{2x+3}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3/2\right) \wedge (x-3>0 \Rightarrow x>3) \\ \wedge \\ \left(2x+3 \leq 0 \Rightarrow x \leq -3/2\right) \wedge (x-3<0 \Rightarrow x<3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x \in \left[-3/2, \infty\right) \wedge x \in (3, \infty) \\ \cup \\ x \in \left(-\infty, -3/2\right] \wedge x \in (-\infty, 3) \end{cases}\right\} (3, \infty) \cup \left(-\infty, -3/2\right] \therefore Cs = \left(-\infty, -3/2\right] \cup (3, \infty)$$



Inecuaciones Continuas o Simultáneas:

Cuando aparecen tres miembros. Situación que no se da en las ecuaciones.

Existen distintos tipos:

Caso 1: Cuando en el *1er* y *3er* miembro solo hay números y la variable *x* está solo en el término central, por lo tanto es posible trabajarla sin separar la expresión, como veremos a continuación.

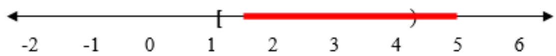
EJEMPLO

h) $-3 \le 4x - 9 < 11$

$$-3 \le 4x-9<11 \Rightarrow -3+9 \le 4x-9+9 < 11+9 \Rightarrow 6 \le 4x < 20$$

Dividimos miembro a miembro (*m.a.m.*) por 4:

$$\frac{6}{4} \le \frac{4x}{4} < \frac{20}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} \le x < 5 \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{2};5\right) \therefore \ Cs = \left[\frac{3}{2};5\right)$$

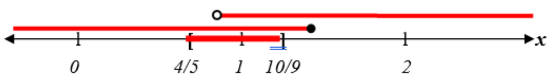


Caso 2: Cuando hay expresiones algebraicas en dos o en los tres miembros. Es aconsejable ***separar la expresión en dos inecuaciones simples***, resolverlas por separado obteniendo los conjuntos solución de cada una y luego ***intersectar*** ambas soluciones para obtener el *Cs*:

EJEMPLO

$$i)\ \ 2x-4 \le 6-7x \le 3x-2 \Rightarrow \begin{cases} (1)\ 2x-4 \le 6-7x \Rightarrow x \le \frac{10}{9} \\ \wedge \\ (2)\ 6-7x \le 3x-2 \Rightarrow x \ge \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{10}{9}\right] \wedge x \in \left[\frac{4}{5}, \infty\right) \Bigg\} \left(-\infty, \frac{10}{9}\right] \cap \left[\frac{4}{5}, \infty\right) \therefore Cs = \left[\frac{4}{5}, \frac{10}{9}\right]$$



Entorno de un número

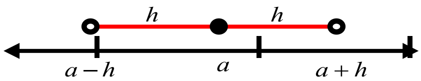
Este conocimiento es necesario para comprender el concepto de límite de una función en un punto. Su interpretación es similar a la utilizada en el ámbito social; cuando te piden que definas tu entorno de amigos, puedes definirlo tan pequeño o tan grande como decidas; si te refieres a los amigos más cercanos, será de tres o cuatro, pero si incluyes a los compañeros del colegio, a los del barrio, etc., entonces dicho entorno puede variar. Lo mismo sucede con el entorno de un número real.

Si definimos un número real ***a*** y un número positivo ***h***; se llama ***entorno*** de centro ***a*** y radio ***h***, y se lo denota con ***N(a, h)***, al intervalo abierto:

$$\mathrm{N}_{(a,h)} = (a-h,\ a+h) \text{ o bien}$$

$$\mathrm{N}_{(a,h)} = \{x \in \Re \,/\, a-h < x < a+h\},\ \text{ó}$$

$$\mathrm{N}_{(a,h)} = \{x \in \Re \,/\, |x-a| < h\}$$



Entorno Reducido de un número:

Es el entorno ***N(a,h)***, al que se le suprime el valor de ***x=a***.

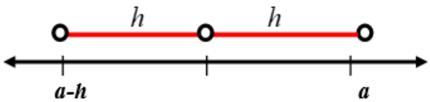
En el entorno de amigos que definimos más arriba, el entorno reducido estará compuesto por todos tus amigos, menos tú.

Si definimos un número real ***a*** y un número positivo ***h***; se llama ***entorno reducido*** de centro ***a*** y radio ***h***, y se lo denota como ***N*(a,h)***, a la unión de intervalos abiertos:

$$\mathrm{N}^*_{(a,h)} = (a-h,\ a) \cup (a,\ a+h) \text{ o bien}$$

$$\mathrm{N}^*_{(a,h)} = \{x \in \Re \,/\, a-h < x < a+h \text{ con } x \neq a\},\ \text{ó}$$

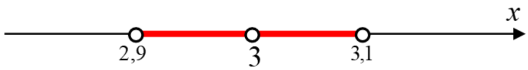
$$\mathrm{N}^*_{(a,h)} = \{x \in \Re \,/\, 0 < |x-a| < h\}$$



EJEMPLO

Exprese en notación de conjunto un entorno reducido del punto 3 y de radio 0,1.

$$\mathrm{N}^*(3;\, 0{,}1) = \{x \in \Re : 3 - 0{,}1 < x < 3 + 0{,}1 \quad x \neq 3\}$$
$$\mathrm{N}^*(3;\, 0{,}1) = \{x \in \Re : 2{,}9 < x < 3{,}1 \quad x \neq 3\}$$



De los conceptos expuestos, el que más nos interesa por la aplicación que tendrá en el estudio de límite de una función, es este último; por tal motivo proponemos ejercitación sobre él.

Valor absoluto o módulo de un número real

Definición: $\forall x \in \Re;\quad |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$; ó: $|x| = \sqrt{x^2}$

De aquí podemos sacar dos primeras conclusiones:

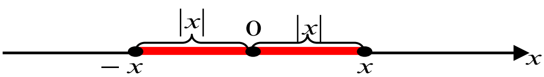
$$\forall x \in \Re : |x| \geq 0 \quad y \quad |x| = |-x|$$

EJEMPLO

1) $|3| = 3$ 2) $|0| = 0$ 3) $|-5| = -(-5) = 5$

Representación geométrica

Para todo número real ***x***, el $|x|$ representa geométricamente la distancia del origen a ***x***.



Principales propiedades del valor absoluto de un número real

$Si\ \ x,\ y \in \Re$, se cumplen:

1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ 3) $|x + y| \le |x| + |y|$

4) $|x - y| \le |x| - |y|$ 5) $|x - y| = |y - x|$ 6) $\sqrt{x^2} = |x|$

Equivalencias más usadas

$$|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a; \quad x \in [-a,\ a]$$

$$|x| \ge a \Rightarrow \begin{cases} x \le -a \\ x \ge a \end{cases}; \qquad x \in \{(-\infty,\ -a] \cup [a,\ \infty)\}$$

NOTA: Estas equivalencias también se cumplen para:

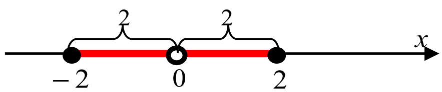
$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a; \quad x \in (-a,\ a)$$

$$|x| \ge a \Rightarrow \begin{cases} x \le -a \\ x \ge a \end{cases}; \qquad x \in \{(-\infty,\ -a) \cup (a,\ \infty)\}$$

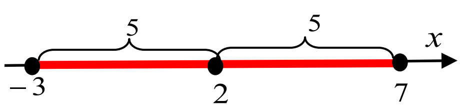
EJEMPLO

expresar en forma de desigualdad, de intervalo o unión de intervalos y gráficamente.

1) $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \therefore x \in (-2,\ 0) \cup (0,\ 2)$



2) $|x - 2| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le x - 2 \le 5 \Leftrightarrow -3 \le x \le 7 \therefore x \in [-3,\ 7]$



CAPÍTULO 2

Nociones de geometría analítica plana

Introducción

El presente capítulo incluye los contenidos elementales de la geometría analítica plana, describiendo la composición del plano cartesiano y en él las representaciones e interpretaciones de los elementos geométricos.

Sumario:

- El Plano Real - Sistema de ejes coordenados cartesianos. Par Ordenado de Números Reales. Punto en el Plano Real.
- La línea recta. Definición. Ángulo de inclinación de una recta. Pendiente de una recta. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas. Ecuaciones de la recta. Ecuación general. Rectas no verticales. Ecuación reducida de la recta. Recta vertical. Ecuación de la recta conociendo uno de sus puntos $(x_1,\ y_1)$ y su pendiente *m.* Intersección entre dos rectas, métodos.
- Nociones elementales de cónicas.
- Circunferencia. Definición. Ecuación canónica de la Circunferencia. Ecuación ordinaria de la Circunferencia. Ecuación general de la Circunferencia. Ecuación que no representa una Circunferencia.
- Elipse. Definición. Método del jardinero. Ecuación canónica de la Elipse. Elipse con centro *C(0,0)* y eje focal coincidente con el eje *OX*. Elipse con centro *C(0,0)* y eje focal coincidente con el eje *OY*. Ecuación ordinaria de la Elipse. Ecuación general de la Elipse. Ecuación que no representa una Elipse.

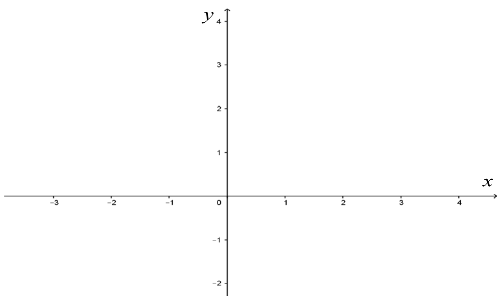
- Hipérbola. Definición. Ecuación canónica de la Hipérbola. Hipérbola con centro *C(0,0)* y eje focal coincidente con el eje *OX*. Hipérbola con centro *C(0,0)* y eje focal coincidente con el eje *OY*. Ecuación ordinaria de la Hipérbola. Ecuación general de la Hipérbola.
- Parábola. Definición. Ecuación canónica de la Parábola de eje vertical. Ecuación canónica de la Parábola de eje horizontal. Ecuación ordinaria de la Parábola. Ecuación general de la Parábola.
- Método para identifican las cónicas. Cuadro resumen.
- Intersección de rectas con cónicas.

El plano real

La representación gráfica de puntos, líneas o figuras planas; se realiza en el ***Plano Real***, que está formado por dos ***ejes Reales*** dispuestos perpendicularmente uno respecto del otro que coinciden en el origen. Este sistema se llama

Sistema de Ejes Coordenados Cartesianos

Cada palabra de este título tiene un significado preciso.
Sistema significa que está compuesto por dos, en este caso, ejes.
Ejes: se trata de ejes Reales.
Coordenados: siguen un orden: 1º: ***x*** y 2º: ***y***
Cartesianos: porque fue el gran filósofo, matemático, físico, etc., René Descartes quien lo definió.



La representación de un punto en el Plano Real está dada por un:

PAR ORDENADO DE NÚMEROS REALES: (x, y)

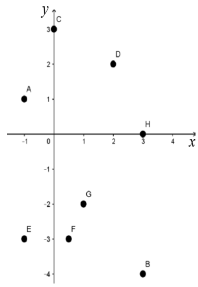
⇕

PUNTO EN EL PLANO REAL

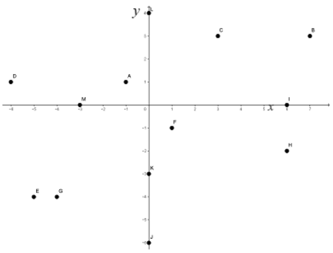
En general: $(x, y) \neq (y, x)$, o sea: $(2, 5) \neq (5, 2)$

EJEMPLO

1) Representar en el Sistema cartesiano los siguientes Pares Ordenados: A(-2, 1); B(3, -4); C(0, 3); D(2, 2); E(-1, -3); F(1/2, -3); G(1, -2) y H(3, 0).
Solución gráfica:



2) Determinar los pares ordenados de números Reales que corresponden a los siguientes puntos del plano.



Solución:
A(-1; 1); B(7; 3); C(3; 3); D(-6; 1); E(-5; -4); F(1, -1);G(-4; -4); H(6; -2); I(6; 0);
J(0; -6); K(0; -3); L(0; 4); M(-3; 0).

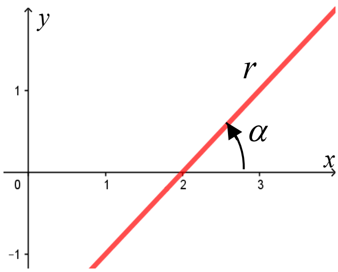
La línea recta

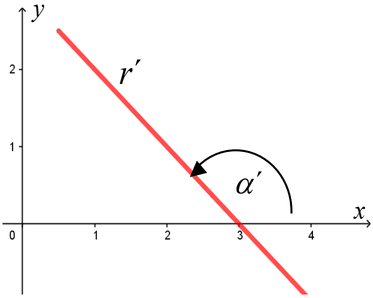
Definición:

En geometría euclidiana, la recta o la línea recta es una línea que se extiende en una misma dirección, por lo tanto tiene una sola dimensión y contiene un número infinito de puntos. Dicha recta también se puede describir como una sucesión continua de puntos extendidos en una sola dirección.

Ángulo de inclinación de una recta

Se llama ángulo de inclinación de una recta y se lo denota con α, a la medida del menor ángulo no negativo, cuyo lado inicial es el semieje *OX* y que tiene su lado terminal sobre la recta dada o paralela a esta.
EJEMPLOS: α y α'

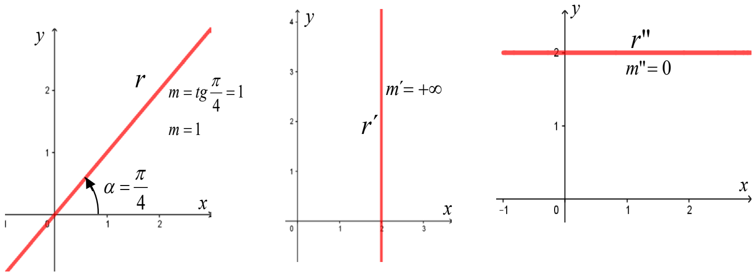




Pendiente de una recta

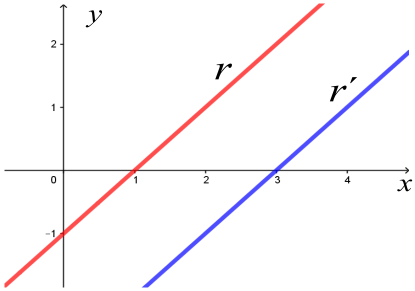
La pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación α de ella y se denota por $m = tg\,\alpha$
De esta definición podemos plantear, que la pendiente de una recta puede tomar valores entre $-\infty$ y $+\infty$; siendo $m = 0$ si la recta es horizontal, o sea, paralela al eje *OX* e ∞, cuando la recta es vertical.

EJEMPLO



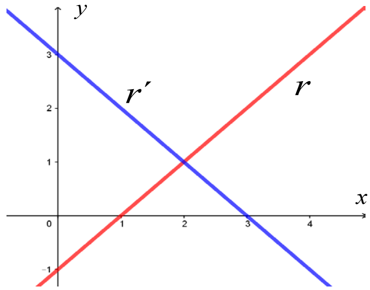
Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas

1) La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus pendientes ***m*** sean iguales.



$$r \,//\, r' \Leftrightarrow m = m'$$

2) La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares es que el producto de sus pendientes ***m*** sea igual a ***-1***.

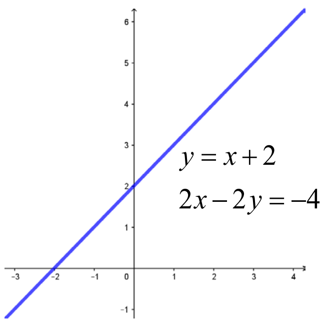


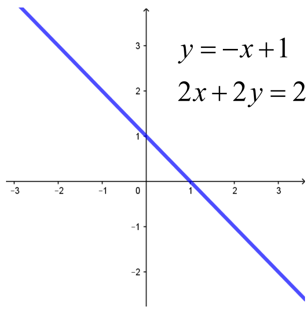
$$r \perp r' \Leftrightarrow m \cdot m' = -1$$

Si dos rectas son paralelas, no se intersectan nunca.

Las rectas coincidentes son aquellas que tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen. En las rectas superpuestas o coincidentes, la ecuación de una es múltiplo de la otra ecuación.

EJEMPLO





Ecuaciones de la recta

Ecuación general: Es de la forma: $Ax + By + C = 0$. Es una ecuación de primer grado en las incógnitas ***x*** e ***y***. ***A***, ***B*** y ***C***, son números reales cualesquiera y se los llama coeficientes. ***A*** y ***B*** no pueden ser cero simultáneamente.

Puede suceder: $\begin{matrix} A \neq 0 \quad y \quad B = 0, \quad ó \\ B \neq 0 \quad y \quad A = 0 \end{matrix}$

EJEMPLO

$$3x - 5y + 2 = 0$$

Rectas no verticales

Ecuación reducida de la recta

Es de la forma: *f(x)=mx+b*
Con "***m***" y "***b***", números reales.
Si ***m ≠0***, la gráfica es una ***recta oblicua***.
Si ***m =0***, la gráfica es una ***recta horizontal***.
b: ordenada al origen; es el punto de intersección de la recta con el eje "***y***".
Al valor ***m: pendiente de la recta*** (coeficiente del término lineal), indica la inclinación de la recta:

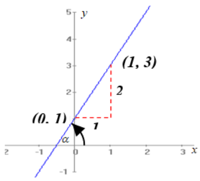
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{var}\,iación \;\; en \;\; y}{\text{var}\,iación \;\; en \;\; x}$$

EJEMPLO

a) $y=2x+1$

$$m=2=\frac{2}{1}$$

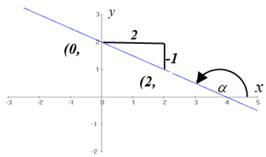
$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$



b) $y=-\frac{1}{2}x+2$

$$m=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$$



Recta horizontal:

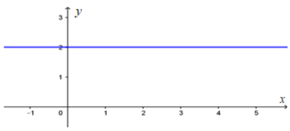
Recta vertical:

EJEMPLO

Ejemplo: $f(x)=2$

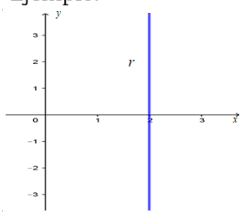
$m=0\Rightarrow\alpha=0^{o}$

$b=2$



Es de la forma $x=k;\quad k\in R$

Ejemplo: $x=2$



Ecuación de la recta conociendo uno de sus puntos $(x_1,\ y_1)$ y su pendiente m:

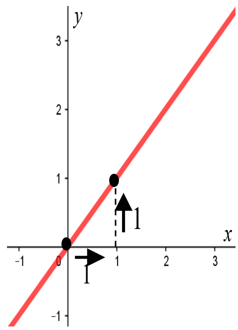
$$y-y_1=m\cdot(x-x_1)$$

EJEMPLO

1) Hallar la ecuación reducida de la recta que pasa por el punto $(0{,}0)$ *y tiene pendiente* 1.
Luego grafíquela en un sistema cartesiano.

$$y-0=1\cdot(x-0)\Rightarrow\ y=x$$

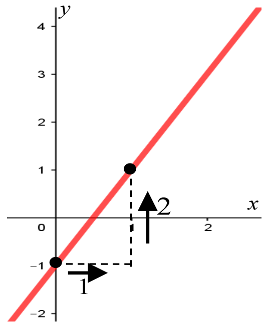
$$m=1=\frac{1}{1};\quad b=0$$



2) Hallar la ecuación reducida de la recta que pasa por el punto $(-1,-3)$ y tiene pendiente 2.
Luego grafíquela en un sistema cartesiano

$$y-(-3)=2\cdot(x-(-1))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y+3=2x+2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=2x-1$$

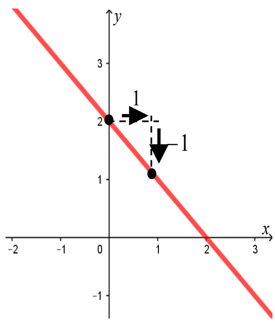
$$m=2=\frac{2}{1};\quad b=-1$$



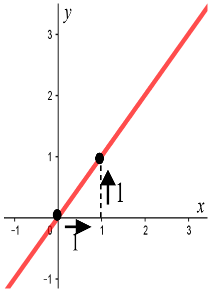
3) Hallar la ecuación reducida de la recta que pasa por el punto $(1{,}1)$ y tiene pendiente -1.
Luego grafíquela en un sistema cartesiano.

$$y-(-3)=2\cdot(x-(-1))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y+3=2x+2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=2x-1$$

$$m=2=\frac{2}{1};\quad b=-1$$



Intersección entre dos rectas



Es común en problemas de álgebra lineal, de geometría analítica y de estudio de funciones, el planteo de encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; esta situación es equivalente a encontrar la intersección entre dos rectas.

Dijimos anteriormente que dos rectas paralelas no se intersectan nunca, o bien, se puede decir que se intersectan en el infinito.

En el caso que dos rectas no sean paralelas, existirá solo una intersección, que será un punto del plano real: *P(x, y)*.

Existen cinco métodos para encontrar la intersección de dos rectas, que será la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. De los cinco métodos, veremos solo 3, por considerar que son los de mayor aplicación.

Los expondremos por medio de los ejemplos siguientes.

EJEMPLO

Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y + x = 2 \end{cases}$$

Método 1: De igualación.

- Se procede a despejar ***"y"*** en ambas ecuaciones, quedando las ecuaciones (1) y (2).
- Luego se igualan ambas ecuaciones, ya que son iguales a ***"y"*** y se despeja el valor de ***"x"***.
- Finalmente se reemplaza el valor de ***"x"*** en cualquiera de las dos ecuaciones (1), o (2) y se encuentra el valor de ***"y"***. Siendo la solución el par ordenado: *P(x, y)*.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 (1) \\ y = -x + 2 (2) \end{cases} \therefore (1) = (2) \Rightarrow 2x - 1 = -x + 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$(1) y = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \therefore Solución: P(1;1)$$

Método 2: De sustitución.

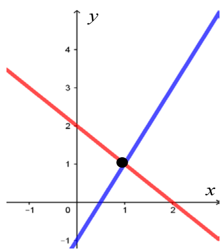
- Se procede a despejar una variable (por ejemplo ***x***) en una ecuación y reemplazarla en la otra.
- De este modo queda armada una ecuación lineal en una variable ***y***, que si tiene solución, es la ordenada del punto de intersección de las dos rectas.
- Finalmente se reemplaza el valor hallado de ***y*** en la ecuación inicial y se encuentra el valor de ***x***. Siendo la solución el par ordenado: *P(x, y)*.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 (1) \\ y + x = 2 (2) \Rightarrow x = 2 - y \end{cases}$$
$\therefore reemplazandoen(1): 2 \cdot (2 - y) - y = 1 \Rightarrow 4 - 3y = 1 \Rightarrow y = 1$
$reemplazandoen(2): x = 2 - 1 = 1 \therefore Solución: P(1; 1)$

Método 3: Gráfico.

En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación está representada gráficamente por una recta y la intersección entre ambas, es la solución del sistema, ***P(x, y)***.

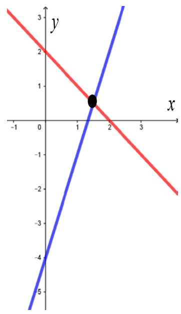
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases} \quad r_1 \cap r_2: P(1; 1)$$



Otros ejemplos:

1) Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, aplicando el método gráfico

$$\begin{cases} y + 4 = 3x \\ y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = -x + 2 \end{cases} \therefore P\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$



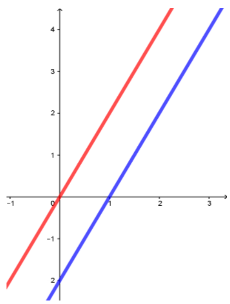
2) Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, aplicando el método de sustitución. Luego graficarlas en un sistema cartesiano.

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 2y - 4x = 0 \Rightarrow 2 \cdot (2x - 2) - 4x = 0 \Rightarrow 4x - 4 - 4x = 0 \Rightarrow -4 = 0 \nexists \end{cases}$$

-4=0, es una incongruencia matemática, lo que nos indica que no existe intersección entre las dos rectas. ¿Qué sucede?

Analicemos nuevamente

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 2y - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 2x \end{cases}$$

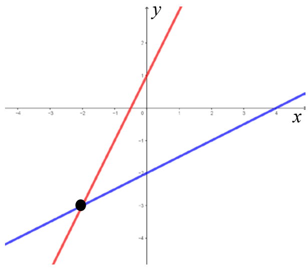


Ambas rectas tienen la misma pendiente, son paralelas, por lo que no tienen intersección.

3) Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, aplicando el método de igualación. Luego graficarlas en un sistema de ejes cartesianos.

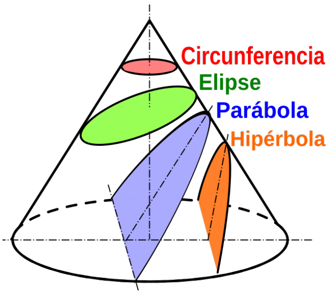
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 2 \\ y - 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 & (1) \\ y = 2x + 1 & (2) \end{cases} \Rightarrow (1) = (2) \Rightarrow \frac{1}{2}x - 2 = 2x + 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2 \qquad \therefore\ y = 2 \cdot (-2) + 1 = -3\ \therefore\ P(-2; -3)$$



Nociones elementales de cónicas

Se llaman curvas cónicas o secciones cónicas, a todas aquellas curvas que se obtienen cortando un cono con un plano. Ya las estudiaban los griegos 350 a.C. Muchos después, en el siglo XVI el filósofo y matemático ***René Descartes*** desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la ***Geometría Analítica***. (2) *Wikipedia: Perspectiva de las secciones cónicas.*



Las curvas cónicas son cuatro: **Circunferencia**, **Elipse**, **Hipérbola** y **Parábola**.

Cada una de ellas responde a una ***ecuación de 2º grado*** en las variables ***x*** e ***y***, y su ***representación gráfica*** son los lugares geométricos (puntos del plano), definidos por estas.

Circunferencia

Definición: Es el conjunto de puntos de un plano que ***equidistan*** de otro ***punto fijo*** llamado ***centro***. La distancia del ***centro*** a cualquier punto de la ***circunferencia*** se llama ***Radio***.

Su gráfica resulta de cortar al cono con un plano ***perpendicular*** a su eje.

Ecuación canónica de la Circunferencia:

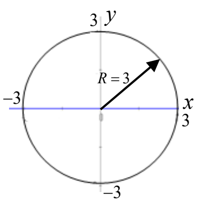
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Circunferencia con centro ***C(0,0)*** y radio ***R***.

EJEMPLO

$$x^2 + y^2 = 9$$

Circunferencia con centro ***C(0,0)*** y radio ***R=3***.



Ecuación ordinaria de la Circunferencia:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

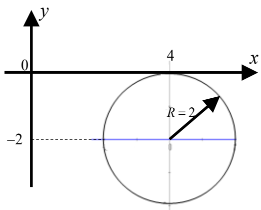
Circunferencia con centro ***C(h,k)*** y radio ***R***.

El centro de la Circunferencia está desplazado del origen de coordenadas.

EJEMPLO

$$(x-4)^2+(y+2)^2=4$$

Circunferencia con centro ***C(4,-2)*** y radio ***R=2***.



Ecuación General de la Circunferencia:

$$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$$

Los coeficientes de x^2 e y^2 deben ser *1*, o reducibles a *1*.

EJEMPLO

Dadas las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) Llevarlas a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia.
b) Determinar las coordenadas del centro y el radio.
c) Trazarla.

1) $x^2+y^2-4x-12y+4=0$

Separamos los términos que contienen ***x*** por un lado y los términos que contienen ***y*** por otro y completamos cuadrados.

$$x^2-4x+4-4=(x-2)^2-4$$
$$y^2-12y+36-36=(y-6)^2-6$$

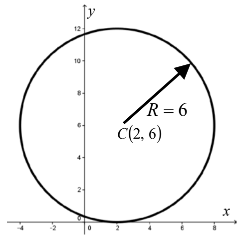
Ahora armamos nuevamente la ecuación y operamos

$(x-2)^2 - 4 + (y-6)^2 - 6 + 4 = 0$

$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$

Corresponde a circunferencia:

$$C(2,6); R = 6$$



2) $3x^2 + 3y^2 - 9x + 12y + 12 = 0$

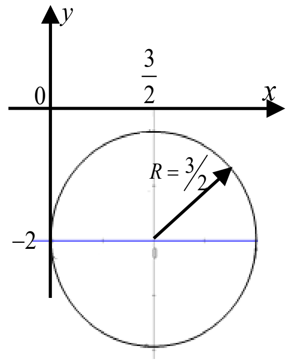
Primero hay que ***reducirla***:

$x^2 + y^2 - 3x + 4y + 4 = 0$

Luego llevarla a la ***forma ordinaria***; para esto hay que ***completar cuadrados*** en ***x*** e ***y***

$x^2 - 3x + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

$y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 = (y+2)^2 - 4$



Armamos ahora la ecuación ordinaria

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = -4 + \frac{9}{4} + 4 = \frac{9}{4}$

Finalmente la ecuación ordinaria es

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{9}{4}$$

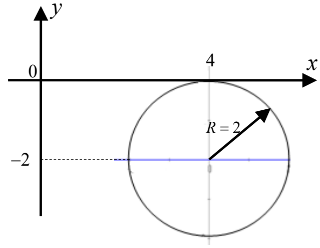
Circunferencia con centro ***C(3/2, -2)*** y radio ***R=3/2***.

3) $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y = 0$

$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

$y^2 + 4y + 4 - 4 = (y+2)^2 - 4$

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$



Circunferencia con centro ***C(4,-2)*** y radio ***R=2***.

Ecuación que no representa una Circunferencia:

Existen casos en que la ecuación parece ser de una circunferencia, sin embargo no lo es.

EJEMPLO

1) $x^2 + y^2 + 3x + y + 10 = 0$

Solución:

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$y^2 + y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -10 + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = -7{,}5$$

$$C\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); \quad R = \sqrt{-7{,}5}; \quad \sqrt{-7{,}5} \notin \Re$$

No es una Circunferencia Real.

Elipse

Definición: Es el conjunto de puntos de un plano tales que la suma de la *distancia* a dos *puntos fijos* llamados *focos* es *constante*.

Su gráfica resulta de cortar al cono con un plano *oblicuo*, que no sea paralelo a su eje y que lo corte por completo.

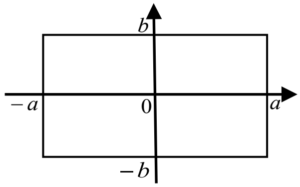
Problema: Se desea construir un cantero para sembrar plantas de flores, de forma elíptica, que quepa en un terreno rectangular de *3 m* de largo, por *2 m* de ancho.

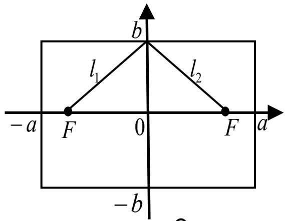
Para dar solución a este problema, apelaremos al siguiente procedimiento.

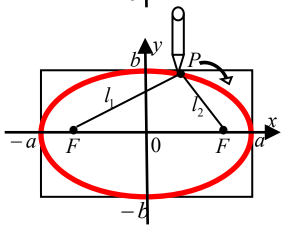
Método del jardinero:

Este método fue utilizado durante mucho tiempo por los jardineros que, sin conocimientos de geometría analítica, desarrollaron este tipo de canteros en jardines de Europa y otros lugares.

1) Se trata de dibujar sobre el suelo un rectángulo de las dimensiones que se quiere y encontrar el centro de cada lado, que llamaremos: *a*; *-a*; *b* y *–b*, por el que haremos pasar los ejes *OX* y *OY*, como muestra la figura.
2) Clavamos una estaca en uno de los puntos *b*
3) Tomamos una cuerda de longitud *L=2a* y la doblamos a la mitad.
4) Hacemos coincidir la mitad de la cuerda con el punto *b* y llevamos ambos extremos hasta que coincidan con el eje *OX*.
5) Estos puntos sobre el eje *OX* se llamarán Focos y clavamos dos estacas para fijarlos.
6) Finalmente desenterramos la estaca que habíamos clavado en *b* y la desplazamos, lo que irá describiendo la elipse.



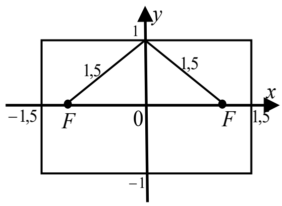




Aplicando el método del jardinero en el problema enunciado más arriba, tenemos que:

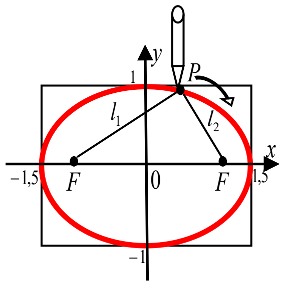
$$L = 2a = 3m \Rightarrow a = 1{,}5m \therefore l_1 = l_2 = 1{,}5m$$

$$2b = 2m \Rightarrow b = 1m$$



Cortamos una cuerda de 3 m de largo, la doblamos al medio y hacemos coincidir ese centro con b; luego estiramos los extremos de la cuerda hasta encontrarse con el eje OX, donde fijamos mediante estacas los Focos F.

Tomamos otra estaca que la hacemos pasar por la cuerda y la desplazamos, marcando el perímetro de la elipse, que será el límite del cantero buscado.



Ecuación canónica de la Elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Al mayor de los denominadores lo llamaremos a^2 y define el semieje mayor de la elipse. Sobre este eje sobre se ubican los *Focos*.
Entonces b^2, define el semieje menor.

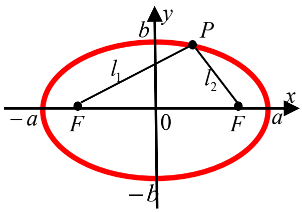
Elipse con centro C(0,0) y eje focal coincidente con el eje OX.

a^2: Se encuentra como denominador de x^2, el semieje mayor coincide con el eje *OX*.

b^2: Semieje menor o secundario, perpendicular al semieje mayor.

La distancia del *centro* al *foco* está dada por:

$$\overline{OF}=\sqrt{a^2-b^2}$$



Se verifica que.

$$L=l_1+l_2=2a \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

EJEMPLO

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

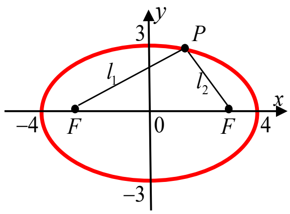
Elipse con centro *C (0,0)* y eje focal coincidente con el eje *OX*.

$a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4; indicaelejemayor$

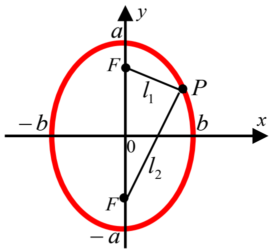
$b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3; indicaelejemenor$

$\overline{OF}=\sqrt{16^2-9^2}=\sqrt{7}=2,64$

$L=l_1+l_2=2\cdot 4=8$



Elipse con centro C(0,0) y eje focal coincidente con el eje O*Y*.



a^2: Se encuentra como denominador de y^2, el semieje mayor coincide con el eje *OY*.
b^2: Semieje menor o secundario, perpendicular al semieje mayor.

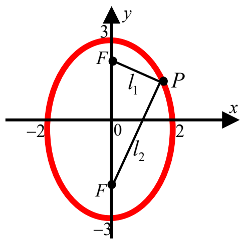
EJEMPLO

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

Elipse con centro *C(0,0)* y eje focal coincidente con el eje *OY*.

$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3 \rightarrow semiejemayor$
$b^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \rightarrow semiejemenor$

$\overline{OF} = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{5} = 2{,}24$
$L = l_1 + l_2 = 2 \cdot 3 = 6$



Ecuación ordinaria de la Elipse:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Elipse con centro *C(h,k)* y eje focal // al eje *OX*.

$$\frac{\left(x-h\right)^2}{b^2}+\frac{\left(y-k\right)^2}{a^2}=1$$

Elipse con centro *C(h,k)* y eje focal // al eje *OY*.

EJEMPLO

1) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

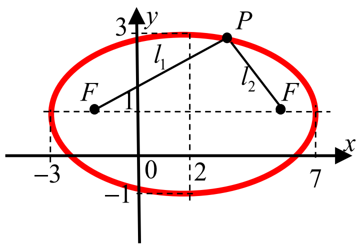
Elipse con centro *C(2,1)* y eje focal // al eje *OX*.

$a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5 \rightarrow semieje\ mayor$

$b^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \rightarrow semieje\ menor$

$\overline{OF} = \sqrt{25^2 - 4^2} = \sqrt{21} = 4{,}58$

$L = l_1 + l_2 = 2 \cdot 5 = 10$



2) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1$

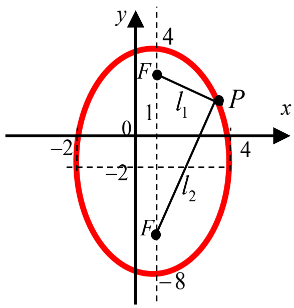
Elipse con centro *C(1,-2)* y eje focal // al eje *OY*.

$a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6 \rightarrow semiejemayor$

$b^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3 \rightarrow semiejemenor$

$\overline{OF} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 5{,}2$

$L = l_1 + l_2 = 2 \cdot 6 = 12$



Ecuación general de la Elipse:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

A y *B* deben tener el ***mismo signo***.

EJEMPLO

Dada la siguiente ecuación de 2º grado, determinar si es elipse; en tal caso determinar su ecuación ordinaria, coordenadas del centro y graficar

1) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 49 = 0.$

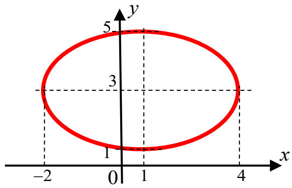
A y *B* tienen el ***mismo signo***. Veamos lo otros parámetros, completando cuadrados en ***x*** e ***y***.

$4x^2 - 8x = 4(x^2 - 2x + 1 - 1) = 4(x-1)^2 - 4$

$9y^2 - 54y = 9(y^2 - 6x + 9 - 9) = 9(y-3)^2 - 81$

Armamos la ecuación y ordenamos:

$4(x-1)^2 - 4 + 9(y-3)^2 - 81 + 49 = 0$
$4(x-1)^2 + 9(y-3)^2 = 36$



Dividimos miembro a miembro en 36:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1 \qquad \begin{array}{l} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{array}$$

Ecuación de una elipse de centro ***C(1, 3)*, *eje focal paralelo al eje OX***

Ecuación que no representa una Elipse:

Existen casos en que la ecuación parece ser de una elipse, sin embargo no lo es.

EJEMPLO

1) $4x^2 + 9x^2 - 8x - 54y + 101 = 0$

A y ***B*** tienen el ***mismo signo***. Veamos los otros parámetros, completando cuadrados en ***x*** e ***y***.

$4x^2 - 8x = 4(x^2 - 2x + 1 - 1) = 4(x-1)^2 - 4$
$9y^2 - 54y = 9(y^2 - 6x + 9 - 9) = 9(y-3)^2 - 81$

Armamos la ecuación y ordenamos:

$4(x-1)^2 - 4 + 9(y-3)^2 - 81 + 101 = 0$
$4(x-1)^2 + 9(y-3)^2 = -16$

No se puede armar la ecuación ordinaria de la elipse, ya que en el segundo miembro hay un número negativo. Esto indica que la ecuación ***No es de una Elipse Real.***

Hipérbola

Definición: Es el conjunto de puntos de un plano tales que la diferencia en valor absoluto de la ***distancia*** a dos ***puntos fijos*** llamados ***foco*** es ***constante***.

Su gráfica resulta de cortar al cono con un plano ***oblicuo***, que no sea paralelo a su eje y no sea paralelo a su generatriz.

Ecuación canónica de la Hipérbola

Hipérbola con centro C(0,0) y eje focal coincidente con el eje OX.

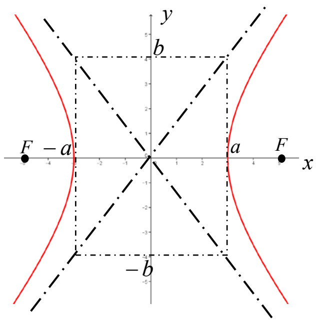
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

El término cuadrático positivo

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right)$$

define el semieje principal, sobre el que se ubican los ***Focos***.

a²: Semieje principal coincidente con el eje *OX*,
b²: Semieje menor o secundario, perpendicular al semieje mayor.



Hipérbola con centro C(0,0) y eje focal coincidente con el eje OY.

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

El término cuadrático positivo

$$\left(\frac{y^2}{b^2}\right)$$

define el semieje principal, sobre el que se ubican los ***Focos***.

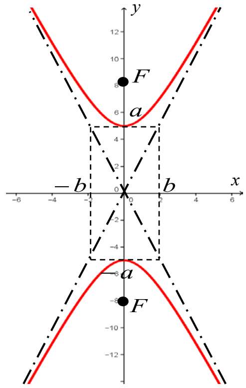
a²: Semieje mayor // al eje *OY*.

b²: Semieje menor o secundario, perpendicular al semieje mayor.

La distancia del ***centro*** al ***foco*** está dada por:

$$\overline{OF} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

NOTA: La hipérbola tiene dos ejes asintóticos y dos vértices, como veremos en los ejemplos.



EJEMPLO

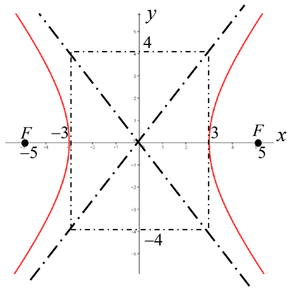
1) $$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Hipérbola con centro ***C(0,0)*** y eje focal coincidente con el eje ***OX***.

$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3 \rightarrow Semieje \rightleftarrows focal$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \rightarrow Semieje \rightleftarrows sec\,u\,ndario$

$\overline{OF} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$



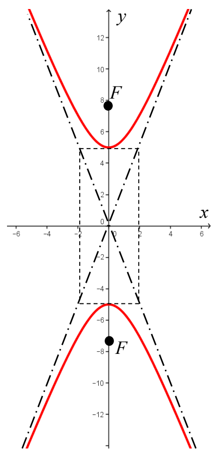
2) $$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$$

Hipérbola con centro ***C(0,0)*** y eje focal coincidente con el eje ***OY***.

$b^2 = 25 \Rightarrow b = \pm 5 \rightarrow Semieje \rightleftarrows focal$

$a^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2 \rightarrow Semieje \rightleftarrows sec\,u\,ndario$

$\overline{OF} = \sqrt{25+4} = 5{,}38$



Ecuaciones ordinarias de la Hipérbola:

Hipérbola con centro *C(h,k)* y eje focal paralelo al el eje *OX*.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Hipérbola con centro *C(h,k)* y eje focal paralelo al el eje *OY*.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Recordemos que el término cuadrático positivo

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right)$$

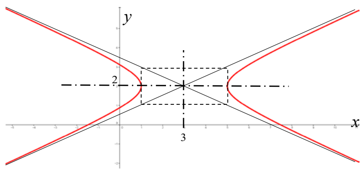
define el semieje principal, sobre el que se ubican los ***Focos***.

EJEMPLO

1) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{1}=1$

Hipérbola con centro ***C(3,2)*** y eje focal // al eje ***OX***.

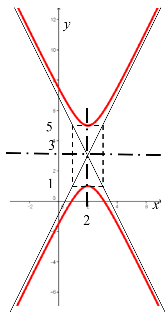
$a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \rightarrow semiejemayor$
$b^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \rightarrow semiejemenor$



2) $\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{1}=1$

Hipérbola con centro ***C(2,3)*** y eje focal // al eje ***OY***.

$a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \rightarrow semiejemayor$
$b^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \rightarrow semiejemenor$



Ecuación General de la Hipérbola

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Con A y B de distinto signo. El término cuadrático positivo (+) indica la posición del eje focal.

EJEMPLO

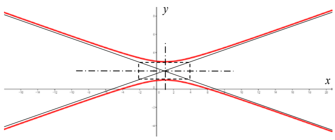
1) $9y^2 - x^2 + 2x - 36y + 26 = 0$

$-(x^2 - 2x + 1 - 1) = -(x-1)^2 + 1$

$9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 9(y-2)^2 - 36$

$9(y-2)^2 - (x-1)^2 = -26 + 36 - 1 = 9$

$\dfrac{(y-2)^2}{1} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1$



Hipérbola con centro *C(1, 2)*; $a = 1; b = 3$
Eje focal // al eje *OY*

2) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

$9(x^2 - 2x + 1 - 1) = 9(x-1)^2 - 9$

$-4(y^2 + 4y + 4 - 4) = -4(y+2)^2 + 16$

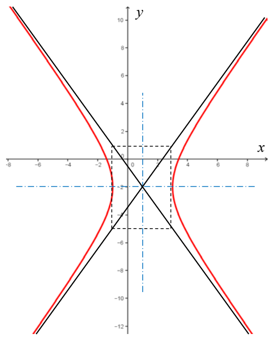
$9(x-1)^2 - 9 - 4(y+2)^2 + 16 - 43 = 0$

$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36$

$\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$

$C(1; -2)$

$a = \sqrt{9} = 3; \quad b = \sqrt{4} = 2$



Hipérbola con centro *C(1, -2)*; eje focal // al eje *OX*

Parábola

Definición: Es el conjunto de puntos de un plano que ***equidistan*** de un ***punto fijo*** llamado ***foco***, y de una ***recta*** llamada ***directriz***.
Resulta de cortar al cono con un plano ***oblicuo***, que sea paralelo a su generatriz.

Ecuación canónica de la Parábola de eje Vertical

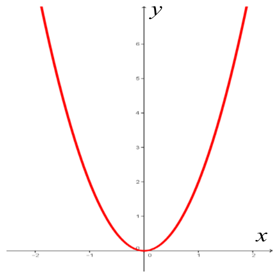
$$y = a \cdot x^2$$

Parábola con vértice *V(0,0)* y eje focal coincidente con el eje *OY*.
Si ***a>0***, abre sus ramas hacia arriba.
Si ***a<0***, abre sus ramas hacia abajo.

EJEMPLO

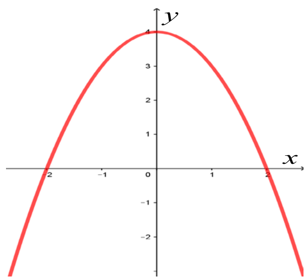
1) $y = 2x^2$

Parábola de eje Vertical; V(0, 0)
a>0; ramas ascendentes.



2) $y = -x^2 + 4$

Parábola de eje Vertical; V(0, 0)
a<0; ramas descendentes.



Ecuación canónica de la Parábola de eje Horizontal

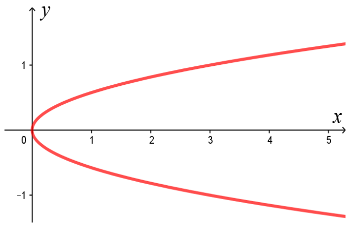
$$x = a \cdot y^2$$

Parábola con vértice *V(0,0)* y eje focal coincidente con el eje *OY*.
Si ***a***>*0*, abre sus ramas hacia la derecha.
Si ***a***<*0*, abre sus ramas hacia la izquierda.

EJEMPLO

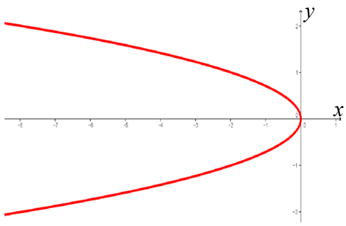
1) $x = 3y^2$

Parábola de eje Horizontal
V(0, 0)
a>*0*, ramas hacia la derecha.



2) $x = -2y^2$

Parábola de eje Horizontal
V(0, 0)
a<*0*, ramas hacia la izquierda.



Ecuación ordinaria de la Parábola:

Parábola con vértice *V(h,k)* y eje focal // al eje *OY*.

$$a(x-h)^2 = b(y-k)$$

Parábola con vértice *V(h,k)* y eje focal // al eje *OX*.

$$a(x-h) = b(y-k)^2$$

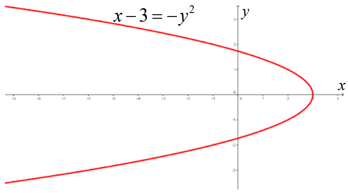
EJEMPLO

1) $x = 3 - y^2$

Se procede a formar el binomio lineal:
$x - 3 = -y^2$; Parábola de eje horizontal
h=3; k=0; vértice ***V(3, 0)***
b<0; Ramas hacia la izquierda.
Intersecciones con los ejes coordenados:

$\cap\, c/\overrightarrow{OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 3$

$\cap\, c/\overrightarrow{OY} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

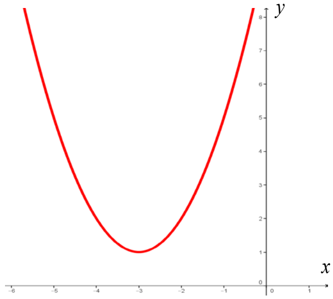


2) $(x + 3)^2 = y - 1$

Parábola de eje vertical
h=-3; k=1; vértice ***V(-3, 1)***
a>0; Ramas hacia arriba.
Intersecciones con los ejes coordenados:

$\cap c/\overrightarrow{ox} : y = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = -1 \nexists$

$\cap c/\overrightarrow{oy} : x = 0 \Rightarrow 9 = y - 1 \Rightarrow y = 10$



Ecuación General de la Parábola:

Parábola de eje vertical: $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$

Parábola de eje horizontal: $By^2 + Cx + Dy + E = 0$

El término cuadrático indica la orientación del eje de la parábola.

EJEMPLO

Dadas las siguientes ecuaciones cuadráticas, determinar si corresponden a parábolas y en tal caso determinar las coordenadas del vértice, orientación de sus ramas, intersecciones con los ejes coordenados y graficar.

1) $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

Término cuadrático en y; parábola de eje horizontal.

$y^2 - 4y + 4 - 4 + 28 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 + 24 = 0 \therefore$ *V(3, 2)*; B>0: *ramas hacia la derecha*

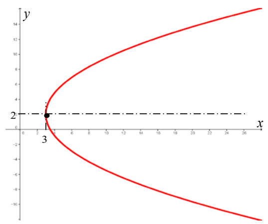
$(y-2)^2 - 8x + 24 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 8(x-3)$

Intersecciones:

$\bigcap c/\overrightarrow{OY} : x = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 28 = 0 \therefore$

$y^2 - 4y + 4 - 4 + 28 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = -24 \Rightarrow \nexists \bigcap c/\overrightarrow{OY}$

$\bigcap c/\overrightarrow{OX} : y = 0 \Rightarrow -8x + 28 = 0 \Rightarrow x = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$



2)

$x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$

$x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9$

$(x-3)^2 - 8y + 16 = 0$

$(x-3)^2 - 8(y-2) = 0$

$(x-3)^2 = 8(y-2)$

$\cap c/\overrightarrow{ox} : y = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = -16 \, \nexists$

$\cap c/\overrightarrow{oy} : x = 0 \Rightarrow (-3)^2 = 8(y-2)$

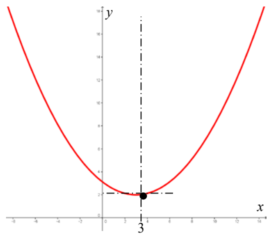
$9 = 8y - 16 \Rightarrow 8y = 25$

$y = \frac{25}{8} \cong 3{,}125$

La ecuación ordinaria es:

$(x-3)^2 = 8(y-2)$

Término cuadrático en ***x***;
parábola de eje vertical.
V(3, 2); A>0: ramas ascendentes.



Método para identifican las cónicas

Partiendo de la Ecuación general de segundo grado:

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,x + D\,y + E = 0\,,$$

vamos a analizar los coeficientes (A, B, C, D y E), según nos indica el siguiente cuadro:

Cuadro resumen de Cónicas

<table>
<tr><th>Según los Coeficientes</th><th>CÓNICA</th><th colspan="2">ECUACIONES</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Si: A=B=1, o reducibles a 1</td><td rowspan="3">CIRCUNFERENCIA</td><td>$x^2 + y^2 = R^2$</td><td>Ecuación Canónica</td></tr>
<tr><td>$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$</td><td>Ecuación Ordinaria</td></tr>
<tr><td>$x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$</td><td>Ecuación General</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Si: A y B tienen el mismo signo</td><td rowspan="3">ELIPSE</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$</td><td>Ecuación Canónica</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
$\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$</td><td>Ecuaciones Ordinarias</td></tr>
<tr><td>$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$</td><td>Ecuación General</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Si: A y B son de distinto signo.
El término cuadrático</td><td rowspan="2">HIPÉRBOLA</td><td>$\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$</td><td>Ecuaciones Canónicas</td></tr>
<tr><td>$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Eje focal // OX</td><td>Ecuaciones Ordinarias</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">(+) indica la posición del eje focal.</td><td rowspan="2"></td><td>$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ Eje focal // OY</td><td></td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0}$</td><td>Ecuación General</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Un solo término cuadrático</td><td rowspan="3">PARÁBOLA</td><td>$y = ax^2$ Eje vertical
$x = ay^2$ Eje horizontal</td><td>Ecuaciones Canónicas</td></tr>
<tr><td>$a(x-h)^2 = b(y-k)$ Eje vertical
$a(x-h) = b(y-k)^2$ Eje horizontal</td><td>Ecuaciones Ordinarias</td></tr>
<tr><td>$By^2 + Cx + Dy + E = 0$ Eje vertical
$Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$ Eje horizontal</td><td>Ecuación General</td></tr>
</table>

Intersección de rectas con cónicas

Cuando estudiamos la recta, resolvimos problemas de intersección entre ellas. En este apartado estudiaremos intersecciones de rectas con curvas cónicas.

En el caso de encontrar la intersección entre dos rectas, se debía resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; en el caso que nos ocupa, de encontrar la o las intersecciones de una recta con una curva cónica, también habrá que resolver un sistema de ecuaciones, pero una será lineal y la otra cuadrática.

El procedimiento consiste en despejar una variable en función de la otra en la ecuación lineal y sustituirla en la ecuación cuadrática. De este modo queda formada una ecuación cuadrática en una sola variable, cuya resolución se puede presentar de tres maneras distintas, según sea el signo del discriminante $b^2 - 4ac$, a saber:

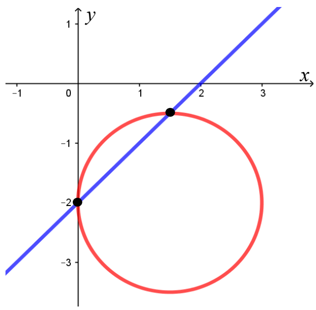
a) Si: $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tendrá dos raíces reales distintas entre sí; y por lo tanto, habrá dos puntos de intersección entre la curva y la recta.
b) Si: $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tendrá una raíz real doble; y por lo tanto, habrá un punto de intersección entre la curva y la recta.
c) Si: $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tendrá raíces reales; y por lo tanto, no habrá ningún punto de intersección entre la curva y la recta.

EJEMPLO

Hallar la o las intersecciones de las siguientes rectas con curvas cónicas:

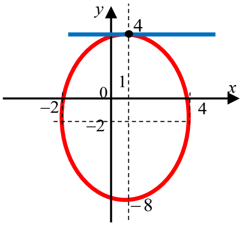
1) $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 9x + 12y + 12 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$

$$3x^2 + 3(x-2)^2 - 9x + 12(x-2) + 12 = 0 \Rightarrow$$
$$3x^2 + 3x^2 - 12x + 12 - 9x + 12x - 24 + 12 = 0$$
$$6x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(6x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$
$$x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = -2 \therefore P_1(0;-2)$$
$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y_{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \therefore P_2\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$$



2) $\begin{cases} y = 4 \\ \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1 \end{cases}$

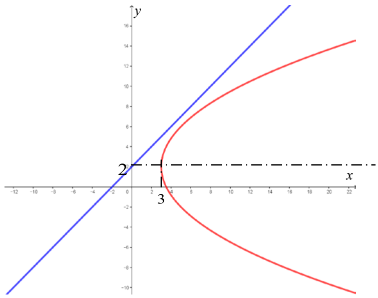
$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(4+2)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + 1 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} = 0 \Rightarrow x = 1 \therefore P(1;4)$$



3) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y^2 - 4y - 8x + 28 = 0 \end{cases}$

$$x = 2 - y$$
$$y^2 - 4y - 8(2-y) + 28 = 0 \Rightarrow y^2 + 4y + 12 = 0 \Rightarrow$$
$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-48}}{2} \therefore 16 - 48 < 0 \Rightarrow \nexists \cap$$

No hay intersección entre la recta y la parábola.



CAPÍTULO 3

Funciones de una variable real

René Descartes (1596-1650). Nacido en La Haye, Francia. Estudió en el colegio jesuita La Flèche, y luego derecho en la Universidad de Poitiers. Al meditar sobre las enseñanzas recibidas en el colegio, se decepcionó, debido a las numerosas lagunas que presentaban, a excepción de las matemáticas, en donde veía la posibilidad de encontrar un verdadero saber. Esto lo lleva a poner en duda todo el conocimiento adquirido hasta entonces, definiendo en su libro ***Discurso del método****, su Primera verdad: "****pienso, luego existo****" ("cogito, ergo sum"), "incluso nuestros propios sentidos no engañan"; y para asegurarse de la veracidad de un conocimiento desarrolló el Método Cartesiano, que posee cuatro reglas importantes, que son:*

1. Regla de la evidencia, no se admite nada como verdadero a menos que sea evidente.
2. Regla del análisis: dividir en diferentes partes el problema, para estudiar más íntimamente aquello que se está estudiando.
3. Regla de la síntesis: luego de estudiar todas las partes, se hace una síntesis, una puesta en común de todo lo que hemos obtenido estudiando las diferentes partes.
4. Regla de las comprobaciones: al terminar la síntesis, enumerar todo y revisarlo por si se omite algo, se somete a prueba el conocimiento para comprobar su veracidad (tesis).

Introducción

En este capítulo trataremos el estudio de las funciones de una variable real más usadas.

Esto significa que no están expuestas acá la totalidad de funciones de una variable real, lo que por otro lado, sería imposible, atento a su inmensa cantidad.

Lo primero y acaso más importante a conocer de toda función es su dominio. Con este conocimiento abordaremos los demás elementos, hasta arribar al trazado de la gráfica, que se hará en un sistema de ejes cartesianos, visto en el Capítulo anterior.

Para entender mejor el concepto de función, nos remitiremos a su antecesora, por decirlo de alguna manera, que es: Relación de reales en reales y a partir de ahí, nos concentraremos en el subconjunto de relaciones que constituyen funciones.

Como en el estudio de todas las funciones presentadas analíticamente determinaremos ciertos elementos característicos; vemos conveniente tratarlos antes de abordar su clasificación.

Sumario:

- Relación en una variable real. Definición. Dominio de una relación. Rango de una relación. Distintas formas de expresar una relación. Por extensión. Por comprensión. Gráficamente.
- Función en una variable real. Definición. Dominio de una función. Rango o imagen de una función. Criterio de la recta vertical. Notaciones de funciones.
- Función Biunívoca. Criterio de la regla horizontal. Función inversa. Función creciente y decreciente.
- Nociones de estudio de funciones. Intersecciones con los ejes coordenados. Paridad o simetría. Desplazamiento vertical y horizontal de la gráfica. Asíntotas. Asíntota vertical. Asíntota horizontal. Criterio para determinar Asíntotas Horizontales en funciones racionales.
- Clasificación de funciones.
- Funciones polinomiales: Función cuadrática. Análisis de los coeficientes. Funciones racionales. Funciones Racionales Particulares: Hipérbola. Funciones irracionales: Función raíz cuadrada. Función raíz cúbica.
- Función exponencial. Análisis y Variación de los Parámetros.
- Función logaritmo. Análisis y Variación de los Parámetros. Cambio de base logarítmica.
- Función valor absoluto.
- El círculo trigonométrico. Funciones trigonométricas. La función seno. La función coseno. La función tangente. La función cotangente. La función secante. La función cosecante.
- Gráficos de las funciones trigonométricas, en $[0; 2\pi]$. Análisis de parámetros.

Relación en una variable real

En el capítulo anterior estudiamos el sistema de ejes coordenados cartesianos, que define un Plano Real en el cual existe una correspondencia biunívoca entre un punto del plano y un par ordenado de números reales: $(x;\ y) \Leftrightarrow \textit{Par ordenado de números reales}.$

De acá surge la siguiente definición:

Definición: relación es todo conjunto de pares ordenados de números reales:

$$R = \{\ (x\ ,\ y)\}$$

Dominio de una Relación:

$$dom\, R = \{x \in \Re\ que\ \ participan\ en\ la\ \mathrm{Re}lación\}$$

Rango o Imagen de la Relación:

$$rgo\, R = \{y \in \Re\ \ que\ \ participan\ en\ la\ \mathrm{Re}lación\}$$

Existen distintas maneras de expresar una relación, como veremos a continuación, pero en todas es posible determinar su dominio y su rango o imagen:

Representaciones semióticas más usadas de una relación

- **Por extensión**: cuando se nombran todos los pares ordenados que la componen.

EJEMPLO

$$R_1 = \{(1;4);(-2;0);(0;5);(1;-3);(0;0);(4;4);(2;7)\} \Rightarrow \begin{cases} domf = \{-2,0;1;2;4\} \\ rgof = \{-3,0;4;5;7\} \end{cases}$$

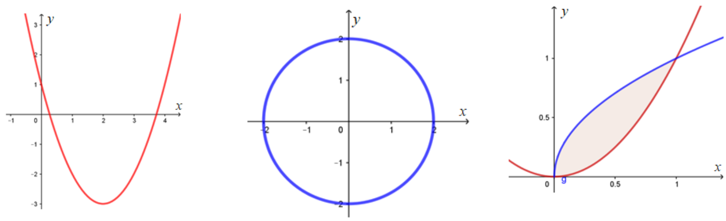
- **Por comprensión**: cuando no es posible nombrar todos los pares ordenados que componen la relación, se las define por medio de una ecuación o una inecuación.

EJEMPLO

$$R_2 = \{(x;y)/y = 2x - 1\} \Rightarrow \begin{cases} domf = \Re \\ rgof = \Re \end{cases}$$

- **Gráficamente**: cuando se las define por medio de gráficos en el plano.

EJEMPLO



Función en una variable real

Las funciones, como se dijo, son un subconjunto de las relaciones; tienen como particularidad que no puede haber dos pares ordenados con la misma primera componente, ***x***.

Definición: es todo conjunto de pares ordenados de números reales tal que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del rango o imagen:

$$y = f(x) = \{(x;\ y)/\forall x \in dom\ f, \exists solo\ un\ \ y \in rgo\ f\}$$

Dominio de una Función:

Es el conjunto de valores reales que puede tomar la variable independiente "***x***" para que la variable dependiente "***y***" (el resultado o valor numérico de la función) sea un número real.

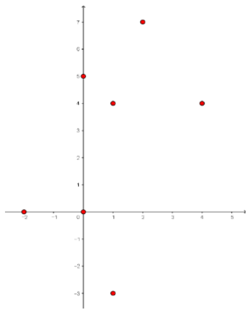
$$dom\ f = \{x \in \Re\ que\ \ participan\ en\ la\ \ Función\}$$

Rango o Imagen de una Función:

Es el conjunto de valores reales que toma la variable dependiente "***y***" para cuando "***x***" toma los valores del dominio de ***f***.

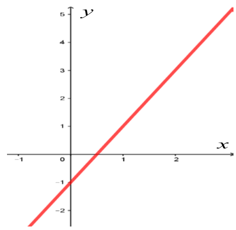
$$rgo\ f = \{y \in \Re\ \ que\ \ participan\ en\ la\ \ Función\}$$

Si analizamos los ejemplos anteriores, podemos observar lo siguiente.



$R_1 = \{(1;4);(-2;0);(0;5);(1;-3);(0;0);(4;4);(2;7)\}$
$\Rightarrow \begin{cases} domf = \{-2{,}0;1;2;4\} \\ rgof = \{-3{,}0;4;5;7\} \end{cases}$

No es función, ya que existen pares ordenados de números reales $(1;4);(1;-3);(0;5)y(0;0)$ que tienen igual sus primeras componentes.



$R_2 = \{(x;y)/y = 2x - 1\} \Rightarrow \begin{cases} domf = \Re \\ rgof = \Re \end{cases}$

Sí es función, porque no hay ningún par ordenado de ella que tenga igual primera componente que otro. Su representación gráfica es la siguiente.

Existe un método nemotécnico que nos permite diferenciar una relación de una función.

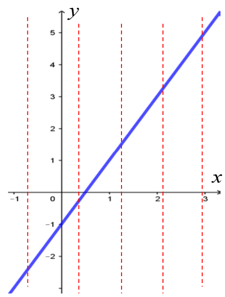
Criterio de la regla vertical:

Si dada la representación gráfica de una función, desplazamos sobre ella una regla ***vertical***, horizontalmente y esta corta a la curva en más de un punto; entonces la gráfica analizada no representa una función.

EJEMPLO

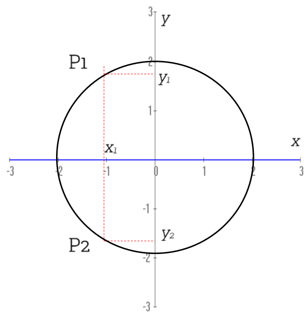
1) $R = \{(x, 2x - 1)\}$
$domR = \ ; rgoR =$

f si es función



2) $R = \{(x, y)/x^2 + y^2 = 4\}$
Es Relación; NOesFunción
$domR = [-2,2]; rgoR = [-2,2]$

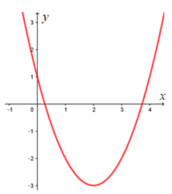
Esta relación ***No es función***, pues para ciertos elementos del dominio hay más de un valor de rango.

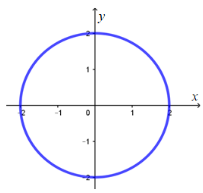


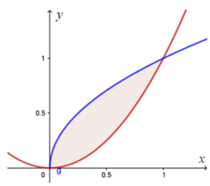
Entonces una función es un conjunto de pares ordenados de números reales que además cumplen la condición de que para cada elemento del dominio ***x***, existe una única imagen ***y***.

EJEMPLO

En los siguientes gráficos determinar cuáles son funciones y cuáles relaciones.







Si aplicamos el criterio de la regla vertical, solo la gráfica de la izquierda es función.

Notaciones de funciones:

Tiene, entre otras, las siguientes ***notaciones***:

$$f=\{(x,\ y)\};\quad f=\{(x,\ f(x))\},\quad f=\{(x,\ y)\,/\,y=f(x)\}$$
$$y=f(x)\Leftrightarrow(x,\ y)\in f$$

x: variable independiente,
y: variable dependiente (depende de x)

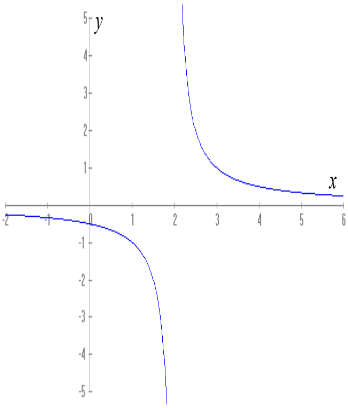
EJEMPLO

1) Dada la función:

$$y=\frac{1}{x-2},$$

determine su dominio y rango, luego grafíquela.
Para determinar el dominio de esta función, analizaremos el denominador, ya que sabemos que debe ser distinto de cero. Entonces:

$$x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$$
$$dom\ f=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$$



Para determinar el rango de esta función, debemos explicitar (despejar) *x* en la ecuación:

$$y=\frac{1}{x-2}\Rightarrow x-2=\frac{1}{y}\Rightarrow x=\frac{1}{y}+2\ \therefore\ rgo\ f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$$

Pero este proceso no siempre es fácil. Lo menos complicado es realizar el estudio de la función, graficarla y luego visualmente determinar su rango.

2) Dada la función:

$$f=\left\{\ (x,y)\,/\,y=f(x)=\sqrt{4-x^2}\ )\ \right\}$$

La podemos escribir de la siguiente manera:

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

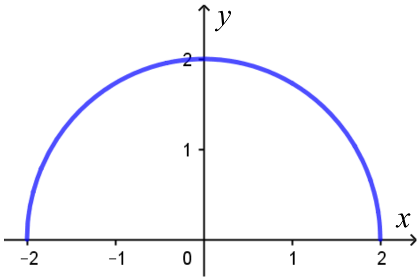
Para determinar el dominio de esta función, hay que considerar que el radicando debe ser mayor o a lo sumo igual a cero:

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2,2] \therefore dom f = [-2,2]$$

Realizando una tabla de valores:

x	y
-2	0
-1	$\sqrt{3}$
0	2
1	$\sqrt{3}$
2	0

$rgo\ f = [0,\ 2]$



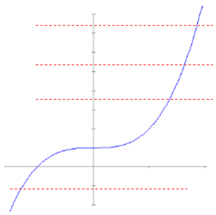
Función biunívoca

Definición: Una función ***f*** es ***biunívoca*** o ***inyectiva*** o ***uno a uno***, si y solo si a dos elementos distintos cualesquiera de dominio de ***f*** les corresponden dos imágenes distintas. O bien; no existen dos pares ordenados con igual imagen.

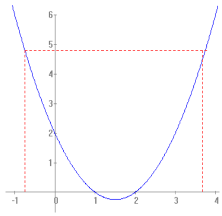
$$\forall x_1, x_2 \in dom\, f,\ con\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Criterio de la regla horizontal

Si dada la representación gráfica de una función, desplazamos sobre ella una recta ***horizontal*** verticalmente y esta corta a la curva en más de un punto, entonces la gráfica analizada no representa una función Biunívoca.



Es biunívoca



No es biunívoca

Función inversa:

Definición: Si ***f*** es una función biunívoca, entonces tiene función inversa y el conjunto obtenido de intercambiar las componentes de cada uno de los pares ordenados de la función ***f***, se llama ***función inversa de f*** y se la denota por f^{-1}

De esta definición se deduce claramente lo siguiente.

i) *dom* f^{-1} = *rgo* f; y *rgo* f^{-1} = *dom* f; o sea que se intercambian dominio con rango.

ii) $\forall (a,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in f^{-1}$

Cuando una función biunívoca ***f*** está definida por una ecuación ***y=f(x)***, esto es:

$$f = \{(x,y) / \mathrm{y} = f(x)\} \begin{cases} dom\ f \\ rgo\ f \end{cases}$$

De acuerdo a la definición se tiene:

$$f^{-1} = \{(\mathrm{y},x) / \mathrm{y} = f^{-1}(x)\} \begin{cases} dom\ f^{-1} = rgo\ f \\ rgo\ f^{-1} = dom\ f \end{cases}$$

Para obtener la ecuación de f^{-1}, se procede a despejar ***x*** en función de ***y*** en la función ***f***.

Las gráficas de ***f*** y f^{-1} son simétricas respecto de la primera bisectriz, o sea de la recta ***y=x***

Se debe graficar con igual escala en ambos ejes, para que la gráfica no salga deformada.

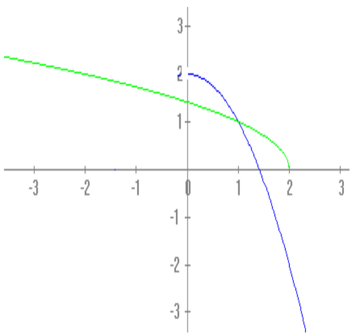
EJEMPLO

1) Determinar si la función dada es biunívoca; en tal caso determinar su función inversa:

$f(x) = \sqrt{2-x}$

$dom\ f = (-\infty, 2]$; $rgo\ f = [0, \infty)$

f *es Biunívoca*



$$y=\sqrt{2-x}\Rightarrow y^2=|2-x|;\quad |2-x|=2-x\ \forall x\in(-\infty,2]$$

$$y^2=2-x\Rightarrow x=2-y^2\ \therefore$$

$$f^{-1}(x)=2-x^2\begin{cases} dom\, f^{-1}=[0,\infty) \\ rgo\, f^{-1}=(-\infty,2] \end{cases}$$

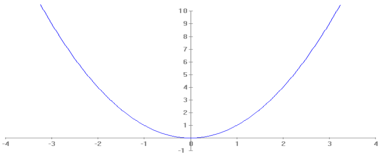
Hay casos en que la función dada no es Biunívoca; entonces, se puede restringir convenientemente el dominio, de manera que abarque todo, o la mayor parte del rango, y esa porción de ***f*** (llamada rama principal de la función), sea biunívoca.

2)

$$y=f(x)=x^2$$

$$dom\, f=\Re,\ rgo\, f=[0,\infty)$$

No es Biunívoca

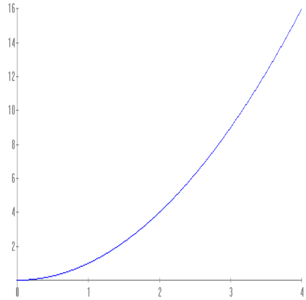


Restringimos el dominio:

$$y=f(x)=x^2,\ con\ x\geq 0$$

$$dom\, f=[0,\infty),\ rgo\ f=[0,\infty)$$

Es Biunívoca



Finalmente, se despeja ***x*** en función de ***y***

$$y=f(x)=x^2,\ con\ x\geq 0$$

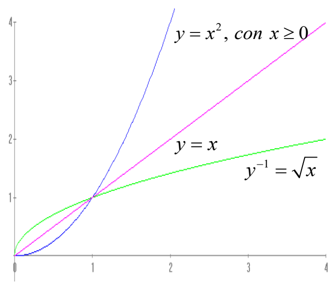
$$|x|=\sqrt{y}\Rightarrow x=\sqrt{y}\ \forall\, x\geq 0$$

Se intercambia y por x:

$$y^{-1}=\sqrt{x}$$

$$dom\, f^{-1}=[0,\infty);\ rgo\, f^{-1}=[0,\infty)$$

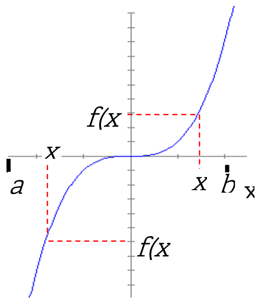
Es Biunívoca



Función creciente y decreciente

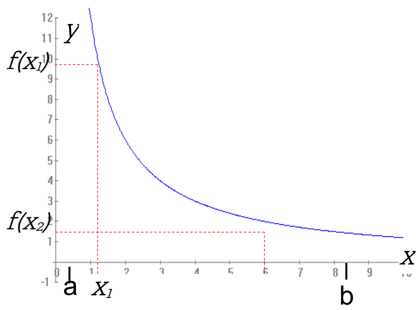
Definición 1: Una función *f* es *creciente* en un intervalo abierto *(a, b)* incluido en el *dom f*, si para todo par de puntos x_1 y x_2 perteneciente al intervalo se verifica que si:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



Definición 2: Una función ***f*** es ***decreciente*** en un intervalo abierto *(a, b)* incluido en el *dom f*, si para todo par de puntos x_1 y $x_2 \in$ al intervalo se verifica que si:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

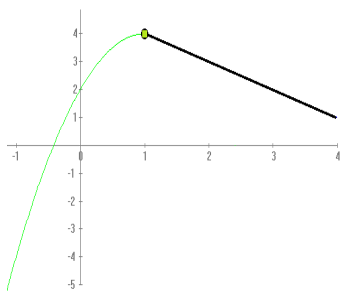


De manera similar se define función Creciente o Decreciente en un intervalo cerrado *[a, b]*, intervalo semiabierto a izquierda *(a, b]* e intervalo semiabierto a derecha *[a, b)*, incluido en el *dom f*.

EJEMPLO

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 4x + 2; -\infty < x \leq 1 \\ 5 - x; x > 1 \end{cases}$$

Esta función tiene:
intervalo de decrecimiento en (-∞, 1]
intervalo de crecimiento en (1, ∞)



Nociones de estudio de funciones

Para poder graficar cualquier función hace falta, además de determinar su dominio, estudiar otras propiedades que determinan ciertas características de ella; estas son las siguientes.

Intersección con los ejes coordenados

Intersección con el eje *OX: y=0*

Son los puntos donde la curva, gráfica de la función, se intersecta con el eje ***OX***. Si es que tiene dichas intersecciones, se las encuentra igualando a cero la función y despejar el o los valores reales de "***x***" que satisfacen dicha ecuación y que pertenezcan al dominio de ella.

$$\cap con\,\overrightarrow{OX} \Rightarrow x\,/\,f(x)=0$$

Intersección con el eje *OY: x=0*

Es el punto donde la curva se intersecta con el eje ***OY***, si es que tiene dicha intersección, se la encuentra haciendo ***x=0*** y se resuelve la ecuación ***f(0).***

$$\cap con\,\overrightarrow{OY} \Rightarrow x=0$$

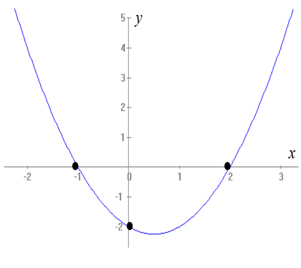
EJEMPLO

$f(x)=x^2-x-2$

$\cap c/\overrightarrow{OX}:\ x^2-x-2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}\ \therefore$

$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow P_1(-1,0) \\ x=2 \Rightarrow P_2(2,0) \end{cases}$

$\cap c/\overrightarrow{OY}: \mathrm{x}=0 \therefore \mathrm{f}(0)=-2 \Rightarrow P_3(0,-2)$



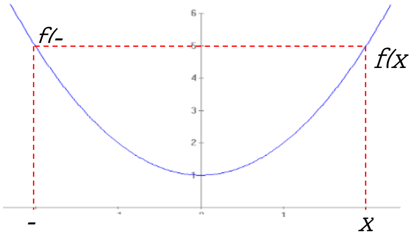
Paridad (simetría)

Función Par:

Una función es **par**, si:

$$\forall x \in dom f \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

Si f es **par**, su gráfica es simétrica respecto al eje $\overline{OY}$

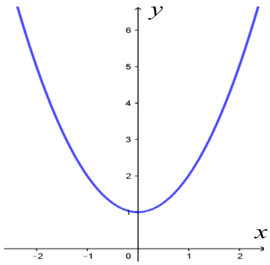


EJEMPLO

$y = x^2 + 1$

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$$

f es par

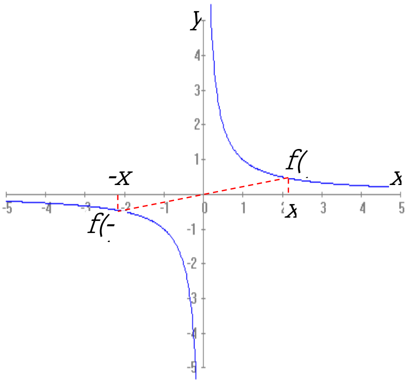


Función Impar:

Una función es **impar**, si:

$$\forall x \in dom f \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Si f es **impar**, su gráfica es simétrica respecto al origen de Coordenadas P(0, 0)



EJEMPLO

$y = x^2 + 1$

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$$

f es impar

Desplazamiento vertical y horizontal de la gráfica

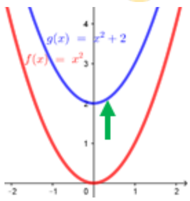
En toda función de una variable real, el ***término independiente*** indica el *desplazamiento vertical de la curva*.

En toda función de una variable real, si al ***argumento*** se le ***suma un número real***, produce un ***desplazamiento horizontal de la curva***.

EJEMPLO

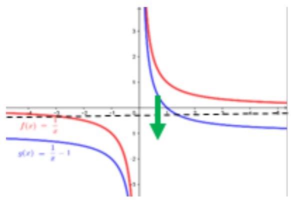
$f(x) = x^2$ y

$g(x) = x^2 + 2$



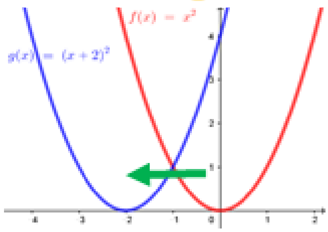
$f(x) = \frac{1}{x}$ y

$g(x) = \frac{1}{x} - 1$



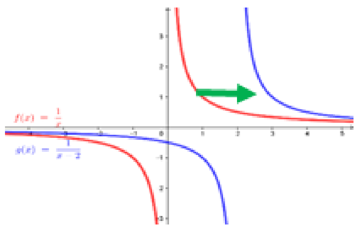
$f(x) = x^2$ y

$g(x) = (x + 2)^2$



$f(x) = \frac{1}{x}$ y

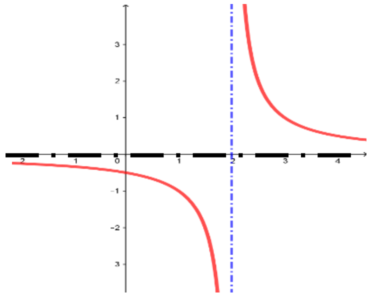
$g(x) = \frac{1}{x - 2}$



Asíntotas

Una asíntota es una recta, a la cual la curva, gráfica de una función, se le acerca indefinidamente sin intersectarla ni hacerse tangente a ella.

Hay asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, nosotros analizaremos las Asíntotas Verticales ***AV*** y las Asíntotas Horizontales ***AH*** de las funciones.



Asíntota Vertical (AV)

Es una recta Vertical, a la cual la curva, gráfica de la función se le acerca indefinidamente sin intersectarla ni hacerse tangente a ella. Vale decir que si *x=a* es una AV de *f(x)*; entonces cuando los valores de *x* se aproximen (tiendan) a "*a*", la función tenderá hacia infinito, o menos infinito, tomando valores cada vez mayores en valor absoluto.

Se denota: $Si\ \ x \to a\ \therefore\ f(x) \to \pm\infty \Rightarrow\ x = a\ \ es\ \ AV\ \ de\ \ f$

Si cuando *x* tiende a *a*, *f* tiende a $\pm\infty$, entones *x=a* es una *Asíntota Vertical* de *f*.

En el caso de las funciones racionales, es posible (pero no seguro) que existan AV en los valores de ***x*** que anulan el denominador. Para determinarlas utilizaremos (por ahora) una tabla de valores, aproximando los valores de "*x*" a las posibles AV y observando los valores que toma *f*.

Asíntota Horizontal (AH)

Es una recta Horizontal, a la cual la curva, gráfica de la función se le acerca indefinidamente sin intersectarla ni hacerse tangente a ella. Vale decir que si *y=c* es una AH de *f(x)*; entonces cuando los valores de *x* "tienden" a infinito y/o a menos infinito, la curva se aproxime al número real "*c*".

Se denota: $Si\ \ x \to \pm\infty\ \therefore\ f(x) \to c,\ c \in \Re \Rightarrow\ y = c\ \ es\ \ AH\ \ de\ \ f$

Y se lee: si cuando *x* tiende a más o a menos infinito, *f* tiende a un número real *c*, entones *y=c* es una *Asíntota Horizontal* de *f*.

Criterio para determinar Asíntotas Horizontales en funciones racionales

Existe un método para hallarla, haciendo el siguiente razonamiento:

$$f(x)=\frac{a_0\cdot x^n+a_1\cdot x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0\cdot x^m+b_1\cdot x^{m-1}+\ldots+b_m},$$

Se toma: $\dfrac{a_0\cdot x^n}{b_0\cdot x^m};\begin{cases}\text{n : grado del polinomio numerador}\\ \text{m : grado del polinomio denominador}\end{cases}$, y se compara:

$$Si\ n>m\Rightarrow la\ gráfica\ de\ f\ No\ tiene\ AH$$

$$Si\ n=m\Rightarrow la\ gráfica\ de\ f\ tiene\ AH\ en\ y=\frac{a_0}{b_0}$$

$$Si\ n<m\Rightarrow la\ gráfica\ de\ f\ tiene\ AH\ en\ y=0\ \left(eje\ \overrightarrow{OX}\right)$$

EJEMPLO

1) Dada la siguiente función, determinar dominio, intersección con los ejes coordenados, simetría, asíntotas verticales y horizontales, si posee, graficar, determinar el rango y si es biunívoca.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4} \qquad x^2-4\neq 0\Rightarrow x^2\neq 4\Rightarrow |x|\neq 2\Rightarrow\begin{cases}x\neq -2\\ x\neq 2\end{cases}$$

$$dom\ f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$$

Simetría: $f(-x)=\dfrac{(-x)}{(-x)^2-4}=\dfrac{-x}{x^2-4}\neq f(x)\Rightarrow No\ par$

$$-f(-x)=-\frac{-x}{x^2-4}=\frac{x}{x^2-4}=f(x)\Rightarrow f\ es\ IMPAR$$

Asíntotas Verticales:

Los valores: *x=2* y *x=-2*, son posibles asíntotas verticales de *f*, ya que anulan el denominador. Tomemos uno y realicemos una tabla de valores.

x	*f(x)*
-2,5	-1,111
-2,1	-5,12
-2,01	-50,12
-2,001	-500,1
➔-2(-)	➔-∞
➔-2(+)	➔+∞
-1,999	499,9
-1,99	49,9
-1,9	4,87
-1,5	0,85

Vemos que a medida que ***x*** se aproxima a -2 ($x \to -2^-$), con valores menores que -2, que se lee: (*x tiende a -2 por la izquierda*), *f* toma valores cada vez más grandes en valor absoluto; tanto que si *x* se acerca indefinidamente a -2^-, *f* toma valores cada vez más grandes, (*tiende a* - ∞).

De manera similar, cuando *x* se acerca a -2^+ (*x tiende a -2 por la derecha*), *f* toma valores cada vez más grandes; tanto que si *x* se acerca indefinidamente a *-*2^+, *f* toma valores cada vez más grandes, (*tiende a* + ∞).

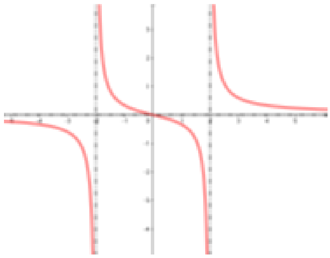
Lo dicho se expresa:

$$\left.\begin{array}{l} si\ \ x \to -2^- \Rightarrow f \to -\infty \\ si\ \ x \to -2^+ \Rightarrow f \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -2\ \ es\ \ A.V.\ de\ \ f$$

Luego, por simetría, recordemos que es una función impar; simétrica respecto a *(0; 0)*, entonces *x=2* también es *A.V.* de *f*.

Asíntota Horizontal:

Grado del numerador:
n=1; grado del denominador: *m=2*,
luego: *n<m*, la gráfica de *f*
tiene una *AH* en *y=0*
Rgo f=R
f No es biunívoca



2) $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-x-2}$

$$x^2 - x - 2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases} \therefore domf = (-\infty, -1) \cup (-1,2) \cup (2, \infty)$$

Asíntotas Verticales:

Los valores: *x=-1* y *x=2*, son posibles asíntotas verticales de *f*, ya que anulan el denominador. Estudiaremos por separado A.V. en *x=-1* y en *x=2*.
En *x=-1*, tenemos:

$$f(-1)=\frac{(-1)^3+(-1)^2}{(-1)^2-(-1)-2}=\frac{0}{0},$$

Forma indeterminada en matemática, por lo tanto $f(-1)\nexists$

$$Si x \neq -1; f(x) = \frac{x^2 \cdot (x+1)}{(x-2)\cdot(x+1)} = \frac{x^2}{(x-2)}$$

$$x \to -1; \frac{x^2}{(x-2)} \to \frac{(-1)^2}{(-1-2)} \to -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \neq \infty$$

$$\therefore x = -1 No es AV de f$$

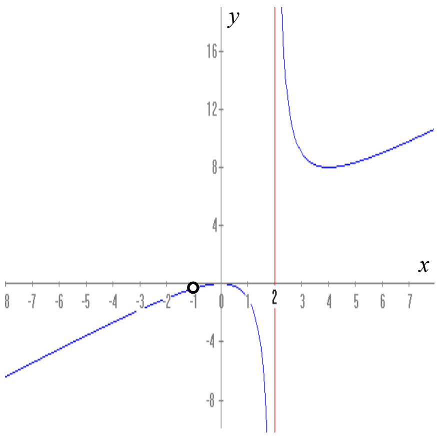
En $x=2$, tenemos:

$$f(2) = \frac{2^3+2^2}{2^2-2-2} = \frac{12}{0}\nexists$$

$$x \to 2; f \to \infty \Rightarrow x = 2 es AV de f$$

Asíntota Horizontal:

Grado del numerador: $n=3$;
grado del denominador: $m=2$,
luego: $n>m$,
la gráfica de f
NO tiene una *AH*.
f No es biunívoca



Observando la gráfica es impreciso determinar el rango de *f*. En casos como este se los puede determinar conociendo extremos relativos, contenido de cálculo diferencial.

Clasificación de funciones

En el siguiente cuadro se presenta una clasificación, no exhaustiva, de funciones.

FUNCIONES ALGEBRAICAS	***f:{x, f(x)}*** donde ***f(x)*** puede ser expresada mediante un número finito de una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación para ***"x"***, y constantes. Se clasifican en: - Funciones Racionales - Funciones Polinomiales - Funciones Irracionales
FUNCIONES TRASCENDENTES	- Función Exponencial - Función Logarítmica - Funciones Trigonométricas - Función Valor Absoluto

Funciones algebraicas

Funciones polinomiales

Están definidas por *f(x)=P(x)*, donde *P(x)* es un polinomio real en *x*.

$$P(x) = f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n \cdot x^0$$
$$con\ a_0 \neq 0 \wedge n \in N$$

Se denomina función polinomial de grado *n*.

Es fácil ver que *P(x)* está definida para todo *"x"*, entonces el dominio de toda función polinomial es el conjunto de los reales $\Re$, ya que para cualquier valor real de *x*, cada término de *f(x)* es un número real y por lo tanto *f(x)* es real. El rango de *f* será en general un subconjunto de $\Re$.

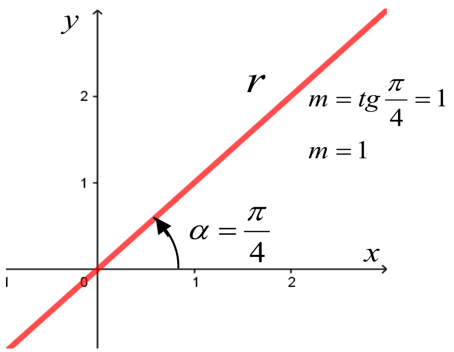
$$Si:\ a_0 = 0\ y\ n = 0;\ f(x) = 0;\ función\ cero$$
$$Si:\ a_0 \neq 0\ y\ n = 0;\ f(x) = a_0;\ función\ constante:\ f(x) = c$$
$$Si:\ a_0 \neq 0\ y\ n = 1;\ función\ lineal:\ f(x) = a\,x + b$$
$$Si:\ a_0 \neq 0\ y\ n = 2;\ función\ cuadrática:\ f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

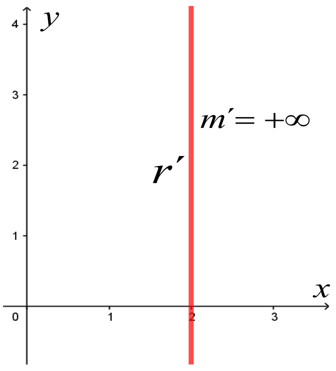
....

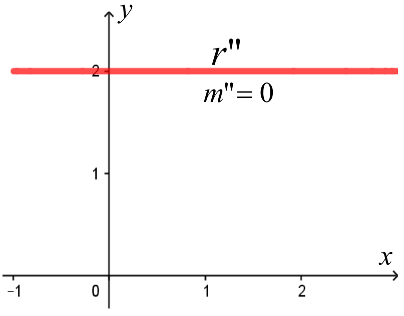
....

$$Si:\ a_0 \neq 0\ y\ n \in N;\ función\ polinomial:$$
$$f(x) = a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2\,x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n$$

En el capítulo anterior estudiamos la ***Recta*** que, según sus posiciones, es la ***función constante***, o la ***función lineal***.







NOTA: Las rectas verticales no son funciones.
Analizaremos algunas de las funciones polinomiales, sin agotar la colección.

Función Cuadrática

Son de la forma: $y=ax^2+bx+c$, con "a", "b" y "c" perteneciente a los reales y además $a \neq 0$.

$$dom\ f = \Re\ .$$

El rango será, de acuerdo al sentido de apertura de la curva:

$$rgof = \begin{cases} (-\infty, k];\ si\ a < 0 \\ [k, \infty);\ si\ a > 0 \end{cases}$$

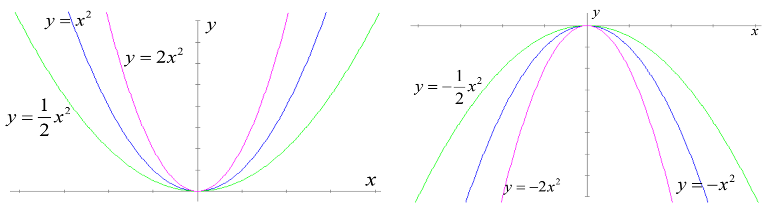
La gráfica es una parábola de eje vertical.

Análisis de los coeficientes

a: coeficiente del término cuadrático, indica cuanto más abierta o cerrada es la curva y si sus ramas van hacia arriba o hacia abajo.

$$\text{Si} \begin{cases} a > 0 \Rightarrow Ramas\ hacia\ arriba. \\ a = 0 \Rightarrow No\ es\ una\ Parábola. \\ a < 0 \Rightarrow Ramas\ hacia\ abajo. \end{cases} \qquad \text{Si} \begin{cases} 0 < a < 1 \Rightarrow Ramas\ más\ abiertas. \\ a > 1 \Rightarrow Ramas\ más\ cerradas. \end{cases}$$

EJEMPLO



b: Coeficiente del término lineal, indica desplazamiento horizontal de la curva.

c: Coeficiente del término independiente (Ordenada al origen), indica el punto de intersección de la curva con el eje "y".

El punto donde la curva cambia de crecimiento se denomina *vértice* de la Parábola y tiene coordenadas: *V(h, k)*. La abscisa y la ordenada del vértice se calculan con las fórmulas:

$$h = \frac{-b}{2a} \qquad k = \frac{-b^2}{4a} + c$$

Los puntos de intersección de la parábola con el eje "***x***" (raíces), se determinan resolviendo la ecuación cuadrática homogénea:

Como ya $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

analizamos anteriormente, pueden ser:

dos raíces reales y distintas, una raíz doble o dos raíces complejas conjugadas, dependiendo del valor del discriminante: $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Si $$\begin{cases} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \Rightarrow La\ Parábola \bigcap al\ eje\ "x"\ en\ dos\ puntos. \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \Rightarrow La\ Parábola \bigcap al\ eje\ "x"\ en\ un\ sólo\ punto. \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \Rightarrow La\ Parábola\ NO \bigcap al\ eje\ "x"\ en\ ningún\ punto. \end{cases}$$

EJEMPLO

Dos raíces reales y distintas $x_1 \neq x_2; x_1, x_2 \in \Re si b^2 - 4ac > 0$, la curva intersecta en dos puntos al eje "*x*".

1) *y=x²-3x+2*

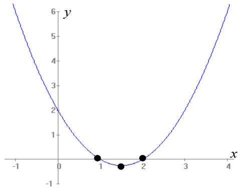
$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$h = \frac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

$$k = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4} \therefore V\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$$

$$domf = R : rgof = \left[-\frac{1}{4}; \infty\right)$$



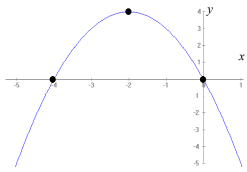
2) $y=-x^2-4x$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.(-1).0}}{2.(-1)}=\frac{-4\pm4}{-2}\therefore$$

$$\therefore x_{1,2}=\begin{cases}x_1=0, P_1(0{,}0)\\ x_2=4, P_2(4{,}0)\end{cases}$$

$$h=\frac{-4}{2.(-1)}=2; k=-(2)^2+4.2=4$$

$$domf=\Re; rgof=-\infty,4$$



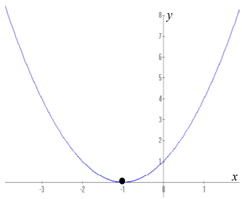
Una raíz real doble $x_1=x_2; x_1, x_2\in\Re si b^2-4ac=0$, la curva intersecta en un punto al eje ***"x"***.

3) $y=x^2+2x+1$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm0}{2}\therefore x_1=x_2=-1$$

$$\left.\begin{array}{l}h=\dfrac{-2}{2\cdot1}=\dfrac{-2}{2}=-1;\\ k=f(-1)=(-2)^2+2(-1)+1=1\end{array}\right\}V(-1;1)$$

$$domf=R; rgof=[0;\infty)$$

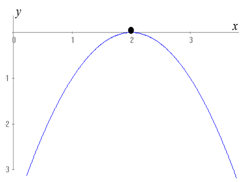


4) $y=-x^2+4x-4$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.(-1).(-4)}}{2.(-1)}=\frac{-4\pm0}{-2}\therefore x_1=x_2$$
$$=2$$

$$h=\frac{-4}{2.(-1)}=2; k=-2^2+4.2-4=0$$

$$domf=\Re; rgof=(-\infty,o]$$



Dos raíces que no pertenecen al conjunto de los números reales $x_1, x_2\in C si b^2-4ac<0$; la curva no intersecta al eje ***"x"***.

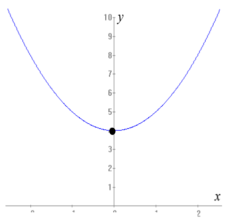
5) $y=x^2+4$

$$x_{1,2}=\frac{0\pm\sqrt{0-4.1.4}}{2.1}=\frac{0\pm\sqrt{-4}}{2}\therefore x_{1,2}\notin\Re$$

Coordenadas del vértice:

$$h=\frac{0}{2.1}=0;\quad k=0^2+4=4;\qquad V(0,\ 4)$$

$$dom\,f=\Re;\quad rgo\,f=[4,\ \infty)$$



6) *y= -x² +2x-2*

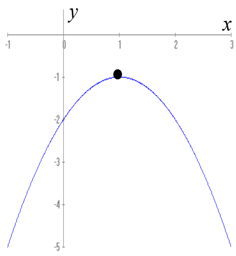
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.(-1).(-2)}}{2.(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$

$$\therefore x_{1,2} \notin \Re$$

$Coordenadasdelvértice$:

$$h = \frac{-2}{2.(-1)} = 1; k = -1^2 + 2 \cdot 1 - 2$$
$$= -1; V(1,-1)$$

$domf = \Re; rgof = (-\infty, -1]$



Función racional

Se llama función racional a una función f definida por: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde *P(x)* y *Q(x)* son polinomios reales en "***x***" y *Q(x)≠0.*

El dominio de esta función es: *dom f:{ x∈ ℜ/ Q(x)≠0}*

El rango de f será en general un subconjunto de los reales.

EJEMPLO

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - x - 2}$$

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)}{(x+1)(x-2)}; domf = (-\infty, -1) \cup (-1,2) \cup (2, \infty)$$

Toda función polinomial es también una función racional, con *Q(x)=1*

$$f(x) = P(x) = \frac{P(x)}{1} = \frac{P(x)}{Q(x)}; conQ(x) = 1$$

Funciones Racionales Particulares: Hipérbola

EJEMPLO

La ley de Ohm relaciona el voltaje **V** (que en las baterías de los autos, suele ser de 12 voltios) con la intensidad de la corriente **I** (ampere) y la resistencia **R** (ohm). Dicha ley afirma lo siguiente.

V=I.R o bien:

$$I = \frac{V}{R}.$$

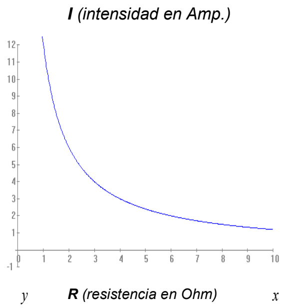
Considerando *V=12V* (constante) y dando valores a *R*, obtenemos distintos valores de *I*.

$$\boldsymbol{I = \frac{12}{R}}$$

Tal tipo de funciones recibe el nombre de *función racional* o *función de proporcionalidad inversa,* porque la variable independiente se encuentra en su denominador.

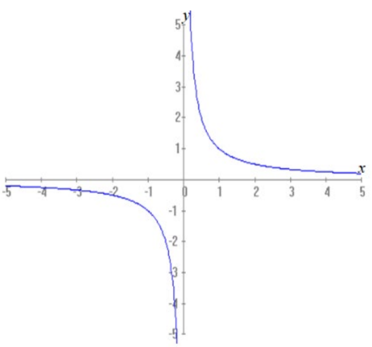
La función racional más sencilla es:

$y = \frac{1}{x}$, se denomina



Hipérbola Equilátera;

$$domf = \{\Re/x \neq 0\}; rgof = \{\Re/x \neq 0\}$$



Como se ve, la función tiene dos ramas, pero en el fenómeno que se describía en el ejemplo anterior, se debió considerar solo una rama, ya que *no existen resistencias negativas*.

En particular estudiaremos ciertas funciones racionales que son de gran aplicación.

La forma general de esta función racional es:

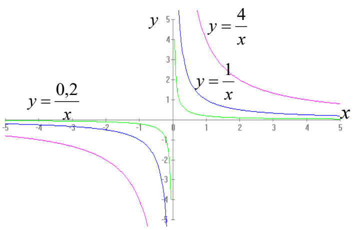
$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k;\, con\!: a; h \wedge k \in \Re;\, a \neq 0$$
$$dom \rightleftarrows f = \{x \in \Re / x \neq h\} = (-\infty, h) \cup (h, \infty)$$

Los coeficientes: ***a***, ***h*** y ***k***, son números ***Reales***, cada uno de ellos indica distintas posiciones de la ***Hipérbola***.

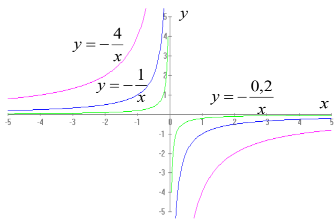
Los valores que toma el coeficiente ***a***, indican cuanto más *abierta* o *cerrada* es la curva y si sus ramas se ubican en el *1º* y *3º cuadrante* o el *2º* y el *4º*, respecto a sus Asíntotas.

EJEMPLO

1)

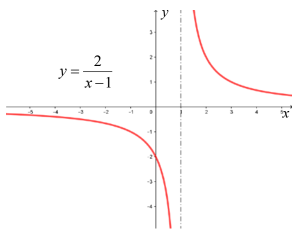


2)

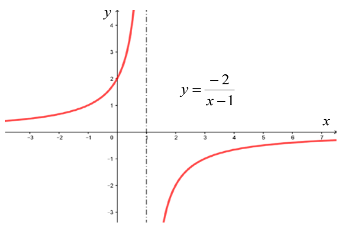


Los valores que toma el coeficiente ***h***, indican el *desplazamiento horizontal de la curva.*

3)

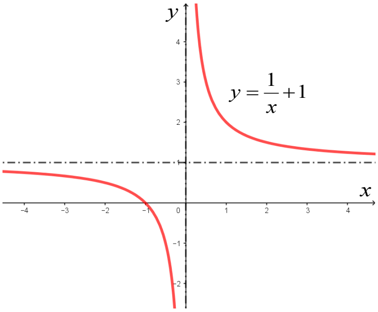


4)

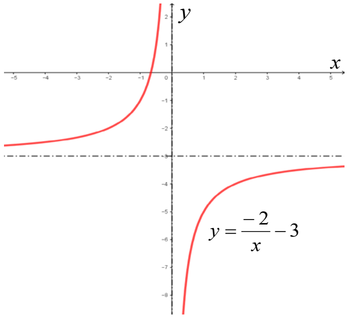


Los valores que toma el coeficiente ***k***, indican el *desplazamiento vertical de la curva.*

5)

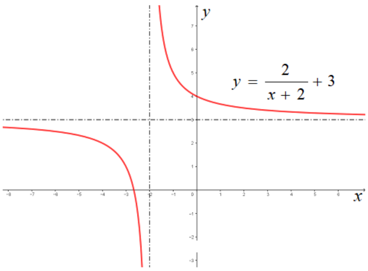


6)

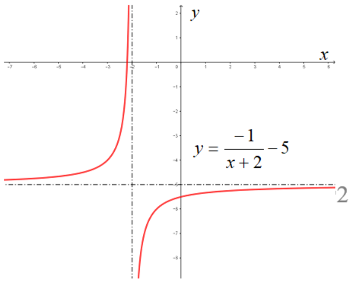


Ejemplos generales:
Dadas las siguientes funciones racionales, represéntelas en un sistema cartesiano.

1)



2)



Funciones irracionales

Son de la forma:

$$f/f(x) = \sqrt[n]{x}; n \in N, n > 1$$
$$\begin{cases} Si\, n\, es\, Par; dom f = [0, \infty) \\ Si\, n\, es\, Impar; dom f = (-\infty, 0] \end{cases}$$

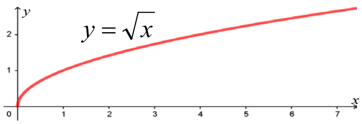
Veremos algunas funciones irracionales, que se utilizan con mayor frecuencia:

Función Raíz Cuadrada

Es de la forma: $f(x) = \sqrt{x}$

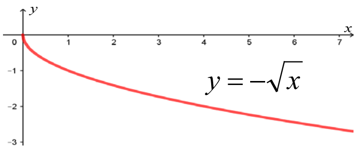
EJEMPLO

1)



$domf\ = 0, \infty); rgof\ = 0, \infty)$

2)

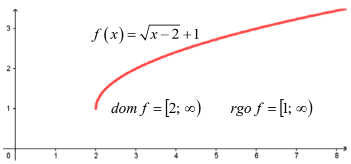


$domf\ = 0, \infty); rgof\ = -\infty, 0$

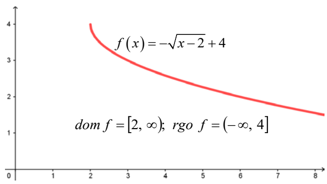
Como en todos los casos, si sumamos o restamos un número en el argumento de la raíz, esta se desplaza horizontalmente; y si sumamos o restamos un número a la función, se desplaza verticalmente, como veremos:

EJEMPLO

1)



2)

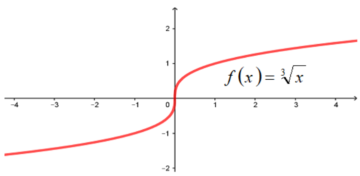


Función Raíz Cúbica

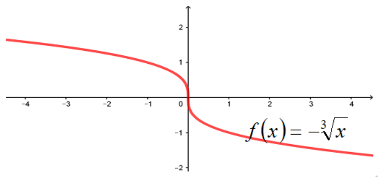
Es de la forma: $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $\quad domf\ = R; rgof\ = R$

EJEMPLO

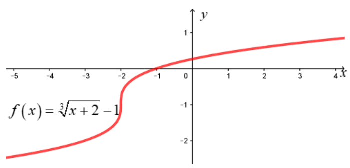
1)

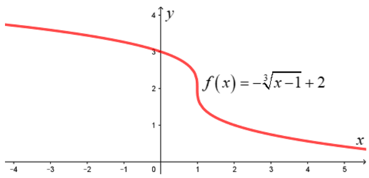


2)



Generalizando:





Funciones trascendentes

Función exponencial

Es de la forma:

$$f(x)=a^x \quad con\ a\in\Re;\ a>0\ \ y\ \ a\neq 1$$

$$dom\ a^x=\Re \quad y \quad rgo\ a^x=(0,\infty)$$

Como ***a*** debe ser un número ***positivo*** y distinto ***de 1***, caben dos posibilidades:

$$a>1\Rightarrow f es Creciente$$
$$0<a<1\Rightarrow f es Decreciente$$

EJEMPLO

Graficar las funciones en el mismo sistema cartesiano:

$$y = 2^x \quad y \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

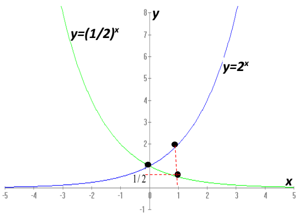
La gráfica de la función exponencial tiene dos puntos característicos:

Cuando ***x=0***, la gráfica intersecta al eje $\overrightarrow{OY}$ de en 1; ***P(0, 1)***.

Cuando $x = 1;\quad y = a\,;$ ***P(1, a)***.

$$y = 2^x \begin{cases} y_{(0)} = 2^0 = 1 \Rightarrow P(0;\,1) \\ y_{(1)} = 2^1 = 2 \Rightarrow P(1;\,2) \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \begin{cases} y_{(0)} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Rightarrow P(0;\,1) \\ y_{(1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(1;\,\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$



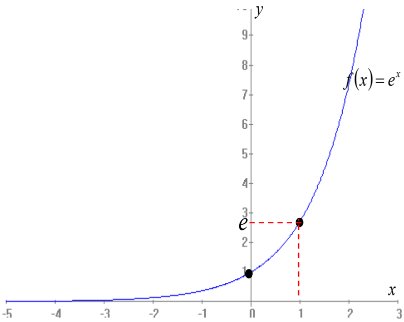
Hay una función exponencial muy importante por su utilidad en aplicaciones matemáticas, es la función exponencial de base ***"e"***.

$$y = e^x$$

La gráfica de esta función es la que se observa a la derecha:

domf $= \Re$; *rgo f= (0, ∞)*

El número ***e*** es la base de los logaritmos naturales (o neperianos); es un número irracional: *e=2,71828182...*



Análisis y variación de los parámetros

La expresión más general de la función exponencial es:

$$f(x) = k \cdot a^{x-b} + c$$

Los parámetros: *a, k; b* y *c*, son números reales, además debe ser *a>0* y distinto de *a ≠1*; y también: *k≠0*

La variación de cada uno de estos parámetros produce modificaciones en la gráfica de la función; ya vimos que sucede con *a*, veamos con los demás parámetros:

k: hace que la gráfica sea más tendida (abierta) o más cerrada.

Si $0<k<1$, la curva es *más tendida*, y si $k>1$, la curva es *más cerrada* respecto a *k=1*

EJEMPLO

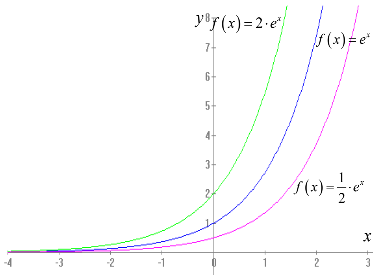
1)

$f(x)=2\cdot e^x$, y $f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^x$

$k>1$ $\quad$ $0<k<1$

x	y		x	y
-2	0,27		-2	0,07
-1	0,74		-1	0,18
0	2		0	0,5
1	5,44		1	1,13
2	14,79		2	3,69

$dom\, f=\Re;\quad rgo\, f=(0,\infty)$



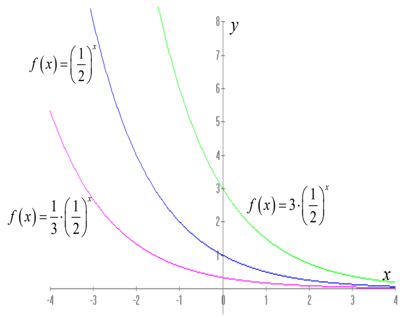
2)

$f(x)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$, y $f(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$k>1$ $\quad$ $0<k<1$

x	y		x	y
-2	12		-2	1,33
-1	6		-1	0,66
0	3		0	0,33
1	1,5		1	0,16
2	0,75		2	0,08

$dom\, f=\Re;\quad rgo\, f=(0,\infty)$



b: hace que la gráfica se *desplace horizontalmente*.

Si $b<0$, la curva se desplaza a la izquierda, y si $b>0$, la curva se desplaza a la derecha.

EJEMPLO

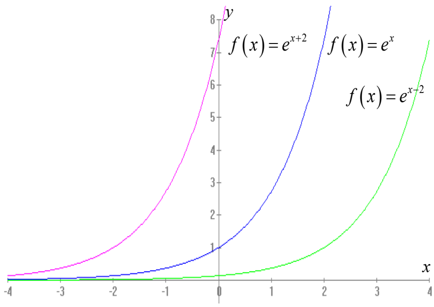
1)

$f(x)=e^{x-2}$, y $f(x)=e^{x+2}$

$b=2;\ b>0$ $b=-2;\ b<0$

x	*y*		*x*	*y*
-2	12		-2	1,33
-1	6		-1	0,66
0	3		0	0,33
1	1,5		1	0,16
2	0,75		2	0,08

$domf = \Re;\quad rgof = (0, \infty)$



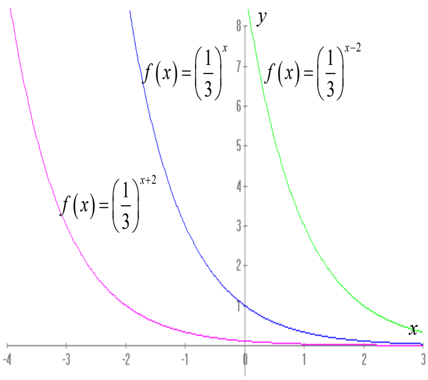
2)

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$, y $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

$b=2;\ b>0$ $b=-2;\ b<0$

x	*y*		*x*	*y*
-2	81		-2	1
-1	27		-1	0,16
0	9		0	0,11
1	3		1	0,04
2	1		2	0,01

$domf = \Re;\quad rgof = (0, \infty)$



c: hace que la gráfica se *desplace verticalmente*. Y también su A.H.

Si $c<0$, la curva se desplaza *hacia abajo*, y si $c>0$, la curva se desplaza *hacia arriba*

EJEMPLO

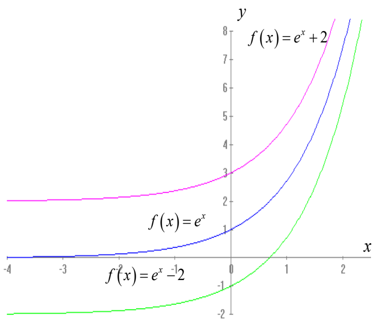
1)

$f(x)=e^x+2$, y $f(x)=e^x-2$

$c=2;\ c>0$ $c=-2;\ c<0$

x	y		x	y
-2	2,14		-2	-1,86
-1	2,37		-1	-1,63
0	3		0	-1
1	4,72		1	0,72
2	9,39		2	5,39

$dom\ f=\Re$

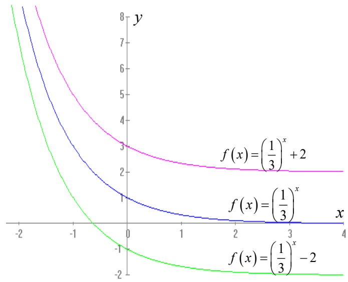


2)

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x+2$, y $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-2$

$c=2;\ c>0$ $c=-2;\ c<0$

x	y		x	y
-2	11		-2	7
-1	5		-1	1
0	3		0	-1
1	2,33		1	-1,67
2	2,11		2	-1,89



Ejemplos generales:

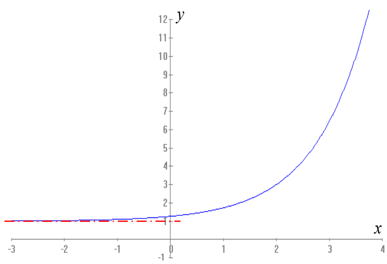
1)

$f(x)=2\cdot e^{x-2}+1$

$k=2;\ b=2;\ c=1$

x	y
-2	1,07
-1	1,05
0	1,16
1	1,37
2	2

$dom\ f=\Re;\quad rgo\ f=(1,\infty)$



La asíntota horizontal se desplaza hacia arriba una unidad.

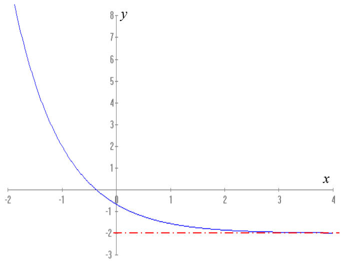
2)

$$f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 2$$

$k = 4;\ b = -1;\ c = -2$

x	y
-2	10
-1	2
0	-0,66
1	-1,56
2	-1,85

$dom\, f = \Re;\quad rgo\, f = (-2, \infty)$



Un caso particular:

3)

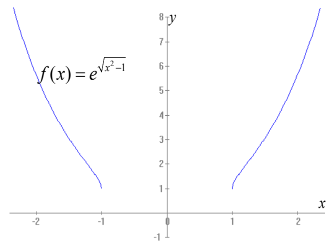
Determine el dominio
de la siguiente función:

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$$

$\sqrt{x^2-1} \in \Re \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{1} \Rightarrow$

$|x| \geq 1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x \geq 1 \\ \vee \\ x \leq -1 \end{matrix}\right\} \therefore x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Por lo tanto:
$dom\, f(x) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$rgo\, f(x) = [1, \infty)$
No tiene A.H.



Función logaritmo

Esta es la función inversa de la función exponencial. Se expresa del siguiente modo.

$$f(x) = log_a\, x\,; cona > 0 \wedge a \neq 1$$
$$f(x) = log_a\, x \Leftrightarrow a^y = x$$
$$domf = (0; \infty); rgof = \Re$$

a : es la base de la función logarítmica e indica distintas posiciones de la curva, según su valor.

Si $a > 1$, la función es Creciente, y si $0 < a < 1$, la función Decrece.

También esta función tiene dos puntos característicos, como la función exponencial:

Si: *x=a*, $log_a(a) = 1$, *P(a, 1)*.

Otro punto destacado es la intersección de la gráfica con al eje de abscisas en *x=1*, *P(1, 0)*.

EJEMPLO

1)

$$y = log_2\, x;\quad 2^y = x$$

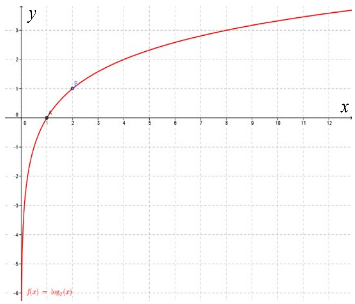
$$a = 2; a > 1, f es\ Creciente$$

Hagamos una tabla de valores:

x	y
1/2	-1
1	*0*
2	*1*
4	2
8	3

$rgof = (0, \infty)$

$AV: x = 0; AH\nexists$



2)

$$y = log_{(1/2)}\, x;\quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^{y} = x$$

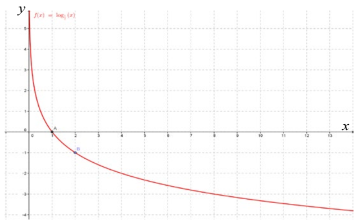
$$a = \frac{1}{2}; 0 < a < 1, f\ \ es\ \ Decreciente$$

Hagamos una tabla de valores:

x	y
1/2	-1
1	*0*
2	*1*
4	2
8	3

$rgof = (0, \infty)$

$AV: x = 0; AH\nexists$



Cuando la base es el número irracional *e*, la función se llama logaritmo neperiano y se la simboliza:

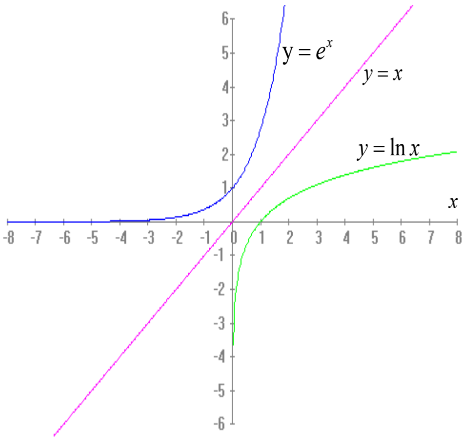
$$y = \ln(x)$$

y es la inversa de la función exponencial $f(x) = e^x$

La gráfica de la función exponencial es simétrica con la gráfica de la función logarítmica, respecto de la primera bisectriz (la recta *y=x).*

Esta es una propiedad de las funciones inversas.

Esta función figura en las calculadoras científicas.

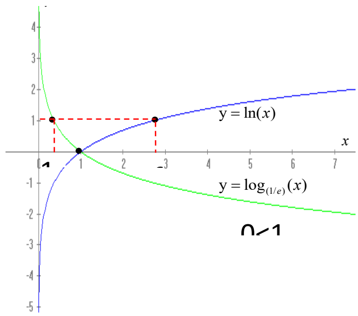


EJEMPLO

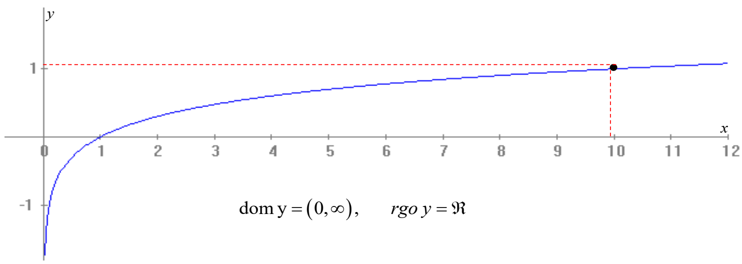
3) Graficar en el mismo sistema de ejes coordenados las funciones:

$y = \ln x$

y $y = \log_{(1/e)} x$



4) Graficar ***y=log(x)***, que indica el logaritmo en base *10* de ***x.***



Esta función también figura en las calculadoras científicas.

Cambio de base logarítmica:

Un recurso útil es el cambio de base del logaritmo, ya que las calculadoras científicas solo tienen las funciones ***ln x*** y ***log x***

Cuando se presenta un logaritmo en una base distinta de estas, se la puede transformar de manera que se pueda calcular con la calculadora, utilizando la siguiente fórmula.

EJEMPLO

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2} \qquad \log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

Análisis y Variación de los Parámetros de la función logaritmo

La expresión más general de la función exponencial es:

$$f(x) = k \cdot \log_a (x - b) + c$$

Los parámetros: ***a, k; b*** y ***c***, son números reales, además debe ser ***a>0*** y distinto de ***a ≠1***; y también: ***k≠0***

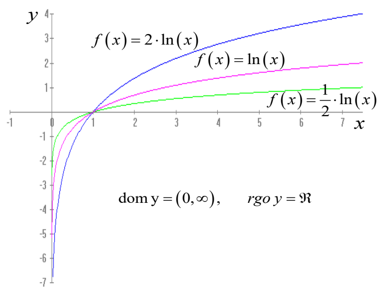
Cada uno de estos parámetros produce modificaciones en la gráfica de la función, ya vimos que sucede con ***a***, veamos con los demás parámetros:

k: hace que la gráfica sea más tendida (abierta) o más cerrada.

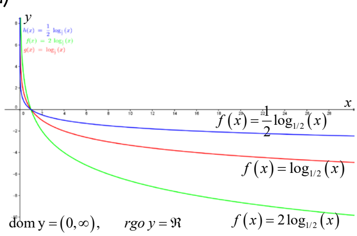
Si $0 < k < 1$, la curva es más tendida, y si $k > 1$, la curva es más cerrada.

EJEMPLO

1)



2)

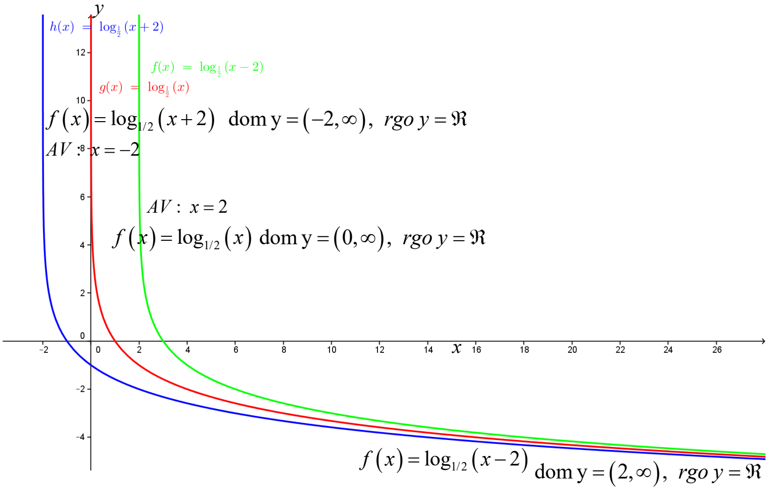


b: hace que la gráfica se desplace horizontalmente. A su vez define la posición de la Asíntota Vertical de la curva.

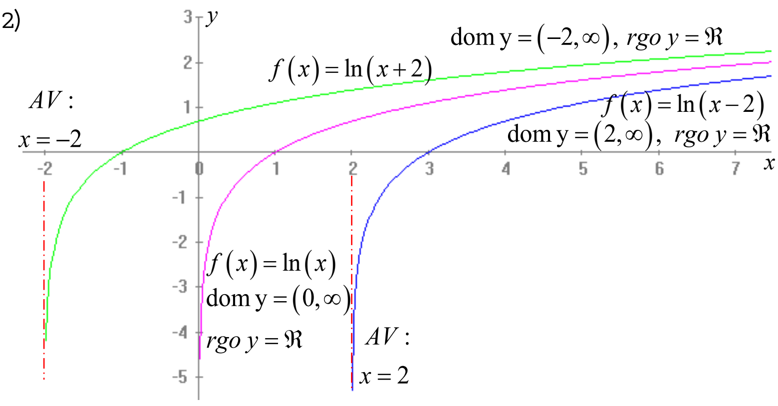
Si $b<0$, la curva se desplaza a la izquierda, y si $b>0$, la curva se desplaza a la derecha

EJEMPLO

1)



2)

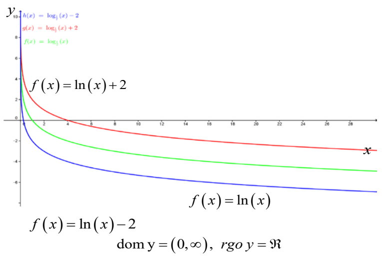


c: hace que la gráfica se desplace verticalmente.

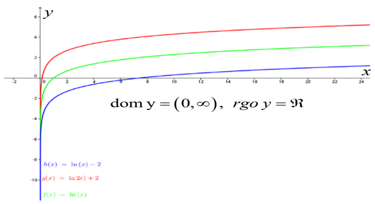
Si $c<0$, la curva se desplaza hacia abajo, y si $c>0$, la curva se desplaza hacia arriba

EJEMPLO

1)



2)



Ejemplos generales:

1) $f(x) = \frac{3}{2} ln(x-1) + 2$:

$$dom f(x) = (1, \infty)$$

$$a = e \Rightarrow f es\ Creciente; k = \frac{3}{2}$$

$$b = 1 \Rightarrow x = 1\ es\ AV\ def$$

$$c = 2 \Rightarrow f se\ desplaza 2 \uparrow$$

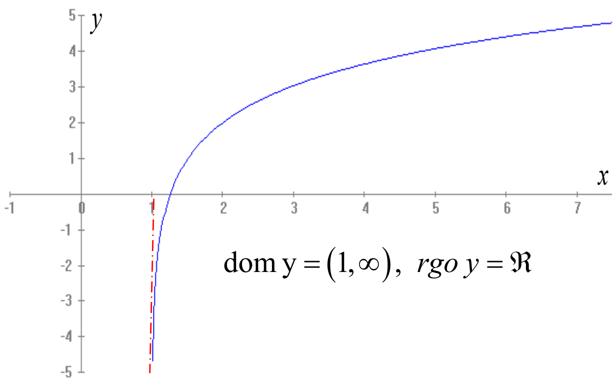
$$\cap\, c/\overrightarrow{OX}: \frac{3}{2} ln(x-1) + 2 = 0 \Rightarrow ln(x-1) = -\frac{4}{3}$$

Despejando x:

$$x - 1 = e^{-4/3} \Rightarrow x = e^{-4/3} + 1 \cong 1{,}26 \therefore P\left(e^{-4/3}, 0\right)$$

$$\cap\, c/\overrightarrow{OX}: \frac{3}{2} ln(x-1) + 2 = 0 \Rightarrow ln(x-1) = -\frac{4}{3}$$

$$\cap\, c/\overrightarrow{OY}: x = 0 \nexists; 0 \notin dom f$$



2) $f(x) = 3\,log_{1/3}(x+1) - 22)$

$domf = (-1, \infty)$

$\cap \frac{c}{\overrightarrow{OX}}: 3 \cdot log_{1/3}(x+1) - 2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = x + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 1 \cong$

$-0{,}13 \therefore P\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 1{,}0\right)$

$\cap\, c/\overrightarrow{OY}: x = 0; f(0) = -2 \therefore P(0,-2)$

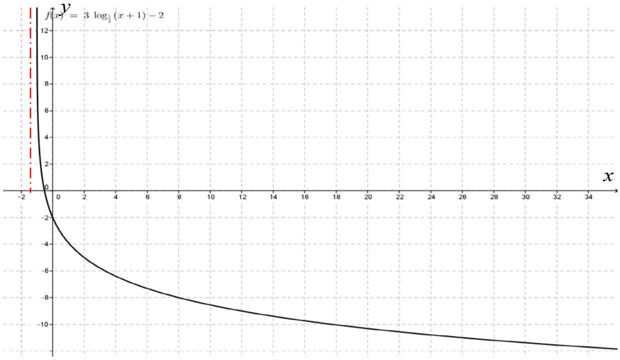
$a = \frac{1}{3} \Rightarrow Decreciente$

$k = 3$

$b = -1 \Rightarrow AVx = -1$

$c = -2; se\ \ desplaza\ \ 2 \downarrow$

$dom\,y = (-1, \infty), rgoy =$



3) $f(x) = 2\,log_3(x-1) + 4$

$domf = (1, \infty)$

$\cap\, c/\overrightarrow{OX}: 2 \cdot log_3(x-1) + 4 = 0 \Rightarrow (3)^{-2} = x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9} + 1 \cong 1{,}11$

$\therefore P(1{,}11; 0) \cap c/\overrightarrow{OY}: x = 0\nexists; 0 \notin domf$

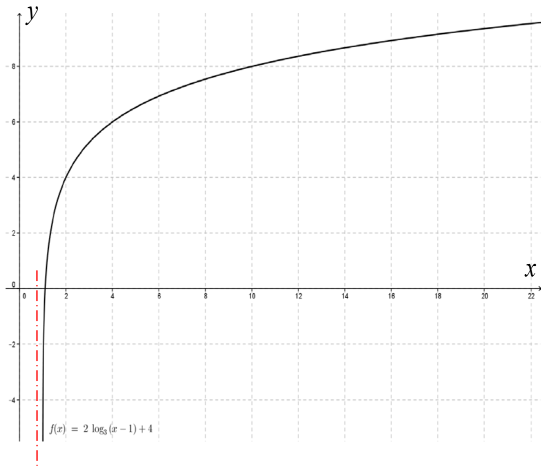
$a = 3 \Rightarrow Creciente$

$k = 2$

$b = 1 \Rightarrow AVx = 1$

$c = 4; sedesplaza4 \uparrow$

$dom\,y = (1, \infty), rgoy = \Re$



Función valor absoluto

La definición de valor absoluto de un número real, vimos que es:

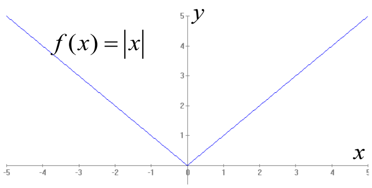
$$\forall x \in \Re; |x| = \begin{cases} x, si x \geq 0 \\ -x, si x < 0 \end{cases}$$

Luego, la Función Valor Absoluto es:

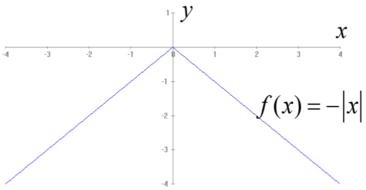
$$f(x) = |x|; \quad \begin{array}{l} f(x) = \{(x, y) / y = |x|, x \in \Re\} \\ domf = \Re; \ rgof = [0, \infty) \end{array}$$

EJEMPLO

1)

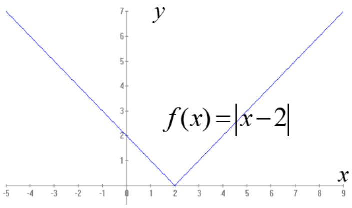


2)

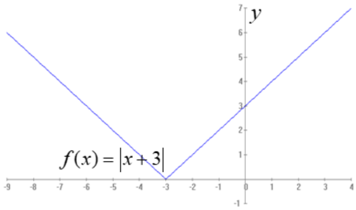


Generalizando:

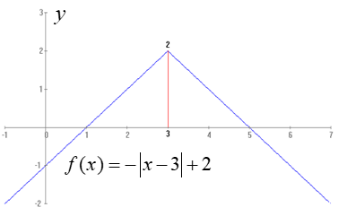
1)



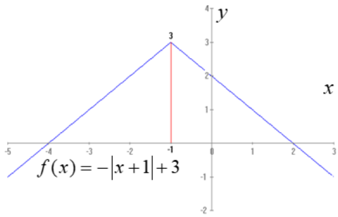
2)



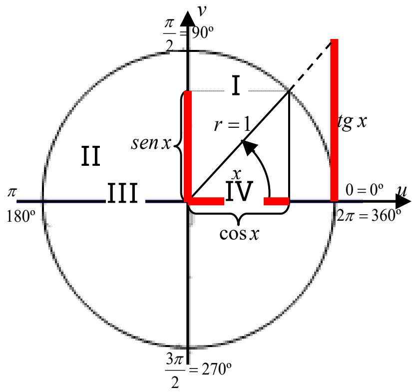
3)



4)



El círculo trigonométrico



Es un círculo de ***radio unitario*** (***r=1***), llamado ***radio vector***, que cuando ***gira en sentido antihorario***, ***barre ángulos (+)***. El círculo tiene centro en el origen de un sistema cartesiano ***C(0, 0)***.

La variable ahora es angular; ***"x"*** se mide en el **Sistema Radián** (visto en el Cap. 2), que tiene su correspondencia con el Sistema Sexagesimal, como indica la figura.

El sistema cartesiano en el que se representa este círculo trigonométrico, tiene dos ejes auxiliares: ***u*** y ***v***, como muestra la figura.

Si observamos, un "giro completo", en el sistema sexagesimal de medición de ángulos equivale a 360º; mientras que en el sistema Radián equivale a ***2 π. r***; pero como el radio es igual a 1, un "giro completo" en el sistema Radián equivale a ***2 π.***

Se puede apreciar que en el sistema Radián los ángulos son ***números Reales***.

El círculo está dividido en cuatro ***cuadrantes***: I, II, III y IV, cada uno cubre un ángulo recto.

La proyección del radio vector sobre el eje vertical representa el ***sen x***; mientras que la proyección del radio vector sobre el eje horizontal representa el ***cos x***

Existe una relación fundamental de las funciones trigonométricas, equivalente al Teorema de Pitágoras:

$$sen^2 x + cos^2\,x = 1$$

De esta relación se pueden despejar, entre otras. las siguientes relaciones: $senx = \sqrt{1 - cos^2\,x}\,;\, cos\,x = \sqrt{1 - sen^2 x}$

Con esta introducción es posible definir las siguientes funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas

La Función Seno:

$$y = senx \begin{cases} domsen = \Re \\ rgosen = [-1{,}1] \end{cases}$$

Es la proyección del radio vector sobre el eje vertical.

La Función Coseno:

$$y = cos\ x \begin{cases} dom\ cos = \Re \\ rgo\ cos = [-1,1] \end{cases}$$

Es la proyección del radio vector sobre el eje horizontal.

La Función Tangente:

$$y = tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x} \qquad \begin{cases} dom\ tg = \Re - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\},\ n \in Z \\ rgo \cos = \Re \end{cases}$$

Es el cociente entre las funciones seno y coseno.

La Función Cosecante:

$$y = \cos ec\ x = \frac{1}{sen\ x} \qquad \begin{cases} dom \cos ec = \Re - \{n\pi\};\ n \in Z \\ rgo \cos ec = (-\infty,\ -1] \cup [1,\ \infty) \end{cases}$$

Es el recíproco de la función seno.

La Función Secante:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \begin{cases} dom \cot g = \Re - \{n\pi\};\ n \in Z \\ rgo \cot g = \Re \end{cases}$$

Es el recíproco de la función coseno.

La Función Cotangente:

$$y = \cot g\ x = \frac{\cos x}{sen\ x} \qquad \begin{cases} dom\ tg = \Re - \{n\pi\},\ n \in Z \\ rgo \cos = \Re \end{cases}$$

Es el cociente entre las funciones coseno y seno.

Gráficos de las funciones trigonométricas, en $[0,\ 2\pi]$

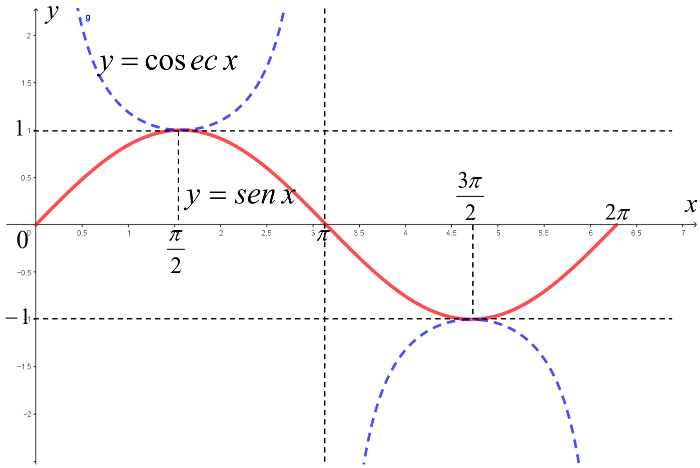
Análisis de parámetros

Se graficarán en el mismo sistema de ejes coordenados las funciones trigonométricas y sus recíprocos.

La Función Seno y la Función Cosecante:

$$y = sen\, x \quad \begin{cases} dom\, sen = \Re \\ rgo\, sen = [-1,\ 1] \end{cases}$$

$$y = \cos ec\, x \quad \begin{cases} dom \cos ec = \Re - \{n\pi\};\ n \in Z \\ rgo \cos ec = (-\infty,\ -1] \cup [1,\ \infty) \end{cases}$$



Análisis y Variación de los Parámetros de la función seno

La Función ***seno*** en general, es de la forma: $f(x) = a \cdot sen(bx + c)$
Los parámetros: ***a, b*** y ***c***, son números reales, además deben ser ***a ≠0*** y ***b≠0***

Cada uno de estos parámetros produce modificaciones en la gráfica de la función, veamos:

Amplitud (a): Amplitud es el valor de pico o valor máximo de la función, además, define si la gráfica es más alta o más baja, determinando el rango de ***f***.

Si $0 < a < 1$, la curva es más baja, y si $a > 1$, la curva es más alta.

EJEMPLO

1) Si f(x) = Sen(x)
a= 1; rgo f= [-1, 1] (simétrico). Como la expresada antes.
2) Si f(x) = 2 Sen(x)
a= 2; rgo f= [-2, 2] (simétrico).

Período (T): Es el ángulo en el que la función realiza un ciclo completo.

Su valor es: *T=(2π/B)*, o *T=(360º/B)*.

1) Si f(x) = sen(x)
T = 2π/1 = 2π, o *T=(360º/1)=360º*. Significa que un ciclo se desarrolla en 360º.
2) Si f(x) = sen(2x)
T = 2π/2 = π, o *T=(360º/2)=180º*. Significa que un ciclo se desarrolla en 180º.

Pulsación: cantidad de ciclos en *2π*.

Fase (c): también llamado *ángulo de fase*, indica el desplazamiento de la gráfica de *f* hacia la izquierda o hacia la derecha, respecto de la función *sen (x)*.

Si *c<0*, la curva se desplaza a la derecha y si *c>0*, se desplaza a la izquierda.

EJEMPLO

1) *f(x) = Sen (x+1)* la gráfica se desplaza *1* hacia la izquierda, respecto de *Sen (x)*.

2) *f(x) = Sen (x- π/2)* la gráfica se desplaza *π/2* hacia la derecha, respecto de *Sen (x)*.

Ejemplos generales

1)

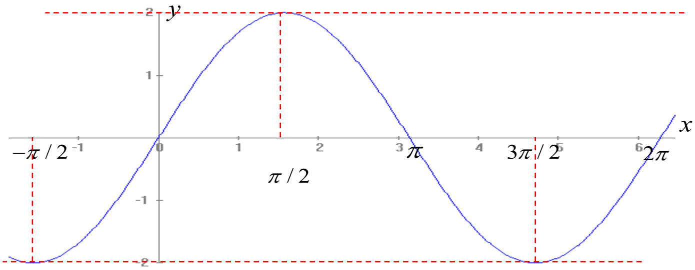
$$f(x) = 2 \cdot sen(x) \qquad \begin{array}{l} dom\ f = \Re \\ rgo\ f = [-2,\ 2] \end{array} \qquad ceros \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

x	2sen x
-90º=- π/2	-2
0	0
90º=π/2	2
180º=π	0
270º=3π/2	-2
360º=3π/2	0

Intersección con ejes:

$$\overrightarrow{OX}\begin{cases} x=0 \\ x=\pi \\ x=2\pi \end{cases} \qquad \overrightarrow{OY} \Rightarrow f(0)=2sen(0)=0 \Rightarrow P(0,\ 0)$$

a=2; Mv: y=2; en x=π/2; Rgo f=[-2, 2]
mv: y=-2; en x=-π/2 y x=3π/2
T=2π; Pulsación= 1
Fase: c=0, no tiene desplaz. H.



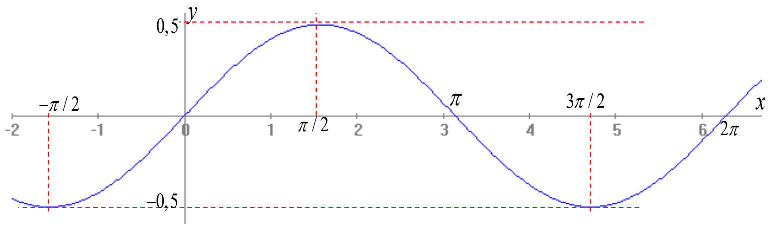
2)

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot sen\left(x\right) \qquad dom\ f=\Re \qquad rgo\ f=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \qquad ceros\begin{cases} x=0 \\ x=\pi \\ x=2\pi \end{cases}$$

x	1/2sen x
-90º=- π/2	-0,5
0	0
90º=π/2	0,5
180º=π	0
270º=3π/2	-0,5
360º=3π/2	0

$$\overrightarrow{OX}\begin{cases} x=0 \\ x=\pi \\ x=2\pi \end{cases} \qquad \overrightarrow{OY} \Rightarrow f(0)=\tfrac{1}{2}sen(0)=0 \Rightarrow P(0,\ 0)$$

Mv: y=0,5; en x= π /2; a= 0,5;
Rgo f=[-0,5, 0,5
mv: y=-0,5; en x=-π/2 y x=3π/2
T=2π; Pulsación= 1, Fase: c=0
No tiene desplaz. H.



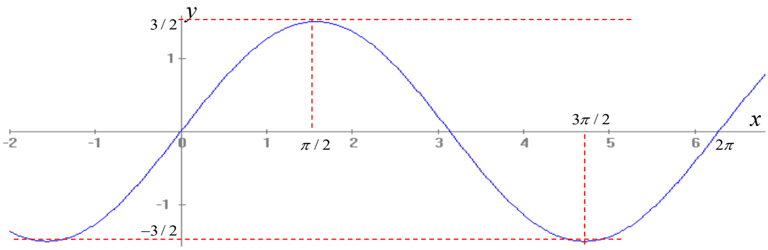
3) $f(x)=\frac{3}{2}\cdot sen(x)$ $\quad dom\ f=\Re$ $\quad rgo\ f=\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$ $\quad ceros\begin{cases}x=0\\x=\pi\\x=2\pi\end{cases}$

x	*3/2sen x*
-90º=- π/2	*-1,5*
0	*0*
90º=π/2	*1,5*
180º=π	*0*
270º=3π/2	*-1,5*
360º=3π/2	*0*

Intersección con ejes:

$\overrightarrow{OX}\begin{cases}x=0\\x=\pi\\x=2\pi\end{cases}$ $\quad \overrightarrow{OY}\Rightarrow f(0)={}^{3}\!/_{2}\,sen(0)=0\Rightarrow P(0,\ 0)$

Mv: y=1,5; en x= π /2;
a: 1,5; Rgo f=[-1,5, 1,5]
mv: y=-1,5; en x=-π/2 y x=3π/2
T=2π; Pulsación= 1; Fase: c=0,
no tiene desplaz. H.



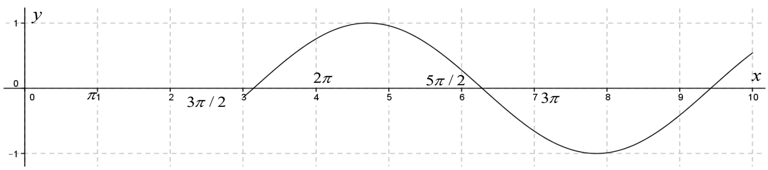
4) $f(x)=sen(x-\pi)$ $\quad dom\ f=\Re$ $\quad$ *Rgo f=[-1, 1]*

$$ceros:\begin{cases}x-\pi=0\Rightarrow x=\pi\\x-\pi=\pi\Rightarrow x=\pi+\pi=2\pi\\x-\pi=2\pi\Rightarrow x=2\pi+\pi=3\pi\end{cases}\quad \overrightarrow{OX}\begin{cases}x=0\\x=\pi\\x=2\pi\end{cases}\quad \overrightarrow{OY}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=sen(0-\pi)\\sen(-\pi)=-sen(\pi)=0\end{cases}$$

$$a=1\Rightarrow\begin{cases}Mv=1\Rightarrow x-\pi=\pi/2\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}\\mv=-1\Rightarrow x-\pi=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}+\pi=\frac{5\pi}{2}\end{cases}$$

Rgo f=[-1, 1]; *T=2π;* *Pulsación= 1*

Fase: c=π, se desplaza *π* a la derecha.

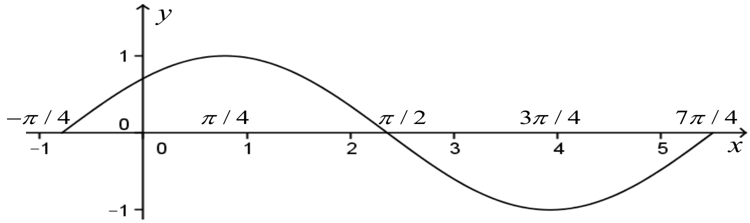


5) $f(x)=sen(x+\pi/4)$

$dom\ f=\Re$ Rgo f=[-1, 1]

$\overrightarrow{OX}\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$ $\overrightarrow{OY}\Rightarrow\begin{cases} f(0)=sen\left(0+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0,707 \end{cases}$ $a=1\Rightarrow\begin{cases} Mv=1\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4} \\ mv=-1\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$

Rgo f=[-1, 1]; T=2π; Pulsación= 1; Fase: c=π/4,
se desplaza **π/4** a la izquierda.

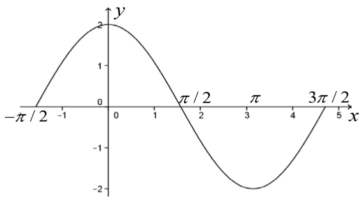


6) $f(x)=2\cdot sen\left(x+\pi/2\right)$ $dom\ f=\Re$ Rgo f=[-2, 2]

$\overrightarrow{OX}\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$ $\overrightarrow{OY}\Rightarrow\begin{cases} f(0)=sen\left(0+\dfrac{\pi}{2}\right) \\ sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1 \end{cases}$ $ceros:\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{2}=0\Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{2} \\ x+\dfrac{\pi}{2}=\pi\Rightarrow x=\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2} \\ x+\dfrac{\pi}{2}=2\pi\Rightarrow x=2\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Rgo f=[-2, 2]; T=2π,
Pulsación= 1; Fase: c=π/2

$a=2\Rightarrow\begin{cases} Mv=2\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=0 \\ mv=-2\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=\pi \end{cases}$

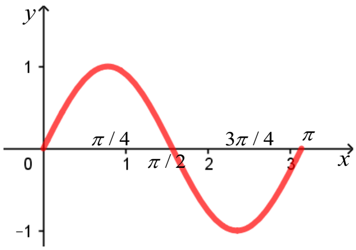


7) $f(x)=sen(2x)$ $dom\ f=\Re$ Rgo f=[-1, 1]

$ceros:\begin{cases} 2x=0\Rightarrow x=0 \\ 2x=\pi\Rightarrow x=\pi/2 \\ 2x=2\pi\Rightarrow x=\pi \end{cases}$ Int. c/ejes $\overrightarrow{OX}\begin{cases} x=0 \\ x=\pi \\ x=2\pi \end{cases}$ $\overrightarrow{OY}\Rightarrow\{f(0)=sen(2\cdot 0)=0$

Rgo f=[-1, 1]; T=π, Pulsación= 2; Fase: c=0.

$$a=1\Rightarrow\begin{cases} Mv=1\Rightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\\ mv=-1\Rightarrow 2x=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$



8) $f(x)=sen\left(\frac{1}{2}x\right)$ $\quad dom\ f=\Re$ $\quad$ Rgo f=[-1, 1]

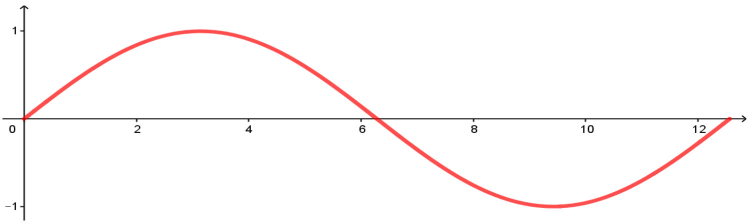
$$ceros:\begin{cases}\frac{1}{2}x=0\Rightarrow x=0\\ \frac{1}{2}x=\pi\Rightarrow x=2\pi\\ \frac{1}{2}x=2\pi\Rightarrow x=4\pi\end{cases}$$

Int. c/ejes

$$\overline{OX}\begin{cases}x=0\\x=2\pi\\x=4\pi\end{cases}\qquad \overline{OY}\Rightarrow\left\{f(0)=sen\left(\frac{1}{2}\cdot 0\right)=0\right.$$

$$a=1\Rightarrow\begin{cases}Mv=1\Rightarrow\frac{1}{2}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\pi\\ mv=-1\Rightarrow\frac{1}{2}x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=3\pi\end{cases}$$

Rgo f=[-1,1]; T=4π, Pulsación= 1/2; Fase: c=0,
no se desplaza horizontalmente.

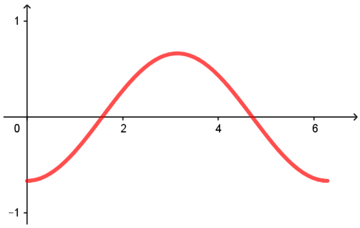


9) $f(x)=\frac{2}{3}sen\left(x-\pi/2\right)$ $\qquad dom\ f=\Re$;

$$ceros:\begin{cases}x-\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{2}=\pi\Rightarrow x=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{2}=2\pi\Rightarrow x=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}\end{cases}\qquad \overline{OX}\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\\x=\frac{3\pi}{2}\\x=\frac{5\pi}{2}\end{cases}\qquad \overline{OY}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=sen\left(0-\frac{\pi}{2}\right)=\\ sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\end{cases}$$

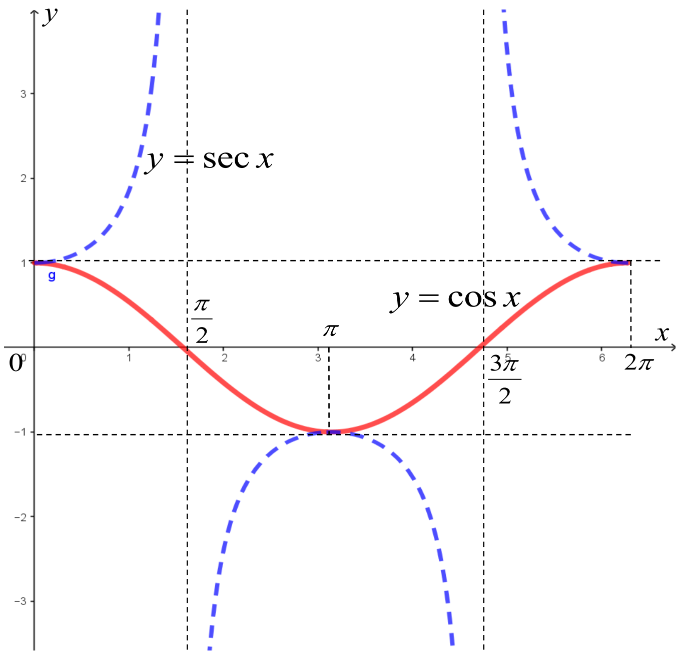
Rgo f=[-0,67, 0,67]; T=2π, Pulsación=1; Fase: c=-π/2,
se desplaza π/2 a la derecha.

$$a=\frac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases}Mv=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\pi\\ mv=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow x=2\pi\end{cases}$$



La Función Coseno y la Función Secante

$$y=\cos x\qquad\begin{cases}dom\cos=\Re\\ rgo\cos=[-1,1]\end{cases}\qquad y=\sec x\qquad\begin{cases}dom\cot g=\Re-\{n\pi\};\ n\in Z\\ rgo\cot g=\Re\end{cases}$$



Análisis y Variación de los Parámetros de la función coseno

La expresión más general de la función exponencial es:

$$f\left(x\right) = a \cdot \cos\left(bx - c\right)$$

Los parámetros: ***a, b*** y ***c***, son números reales, además deben ser ***a ≠0*** y ***b≠0***

Estos parámetros producen modificaciones en la gráfica de la función, del mismo modo que en la función ***sen x***; veamos:

a: hace que la gráfica sea más alta o más baja.

Si $0 < a < 1$, la curva es más baja, y si $a > 1$, la curva es más alta

EJEMPLO

Analizar y graficar las siguientes funciones:

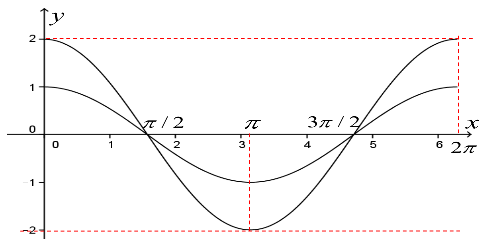
1) $f\left(x\right) = 2 \cdot \cos\left(x\right)$ $\quad dom\, f = \Re \quad rgo\, f = \left[-2,\ 2\right] \quad ceros \begin{cases} x = \pi/2 \\ x = 3\pi/2 \end{cases}$

x	*2 cos x*
	2
90º=π/2	0
180º=π	2
270º=3π/2	0
360º=3π/2	-2

$\overrightarrow{OX} \begin{cases} x = \pi/2 \\ x = 3\pi/2 \end{cases} \qquad \overrightarrow{OY} \Rightarrow f(0) = 2\cos\left(0\right) = 2 \Rightarrow P(0,\ 2)$

$\text{a} = 2 \begin{cases} MV: y = 2;\ x = 0 \\ mV: y = -2;\ \cos x = \pi \end{cases} \qquad Rgo\, f = \left[-2,\ 2\right] \quad T = 2\pi;\ \ Pulsación = 1$

$Fase:\ c = 0,\ \text{no}\ se\ desplaza\ horizontalmente.$



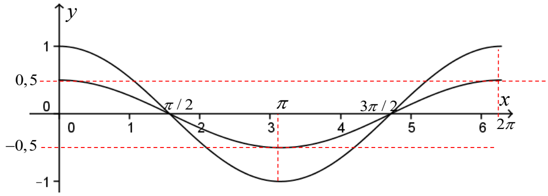
$f\left(x\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \cos\left(x\right) \quad dom\, f = \Re; \quad rgo\, f = \left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right] \quad ceros \begin{cases} x = \pi/2 \\ x = 3\pi/2 \end{cases}$

x	*½ cos x*
0	*½*
90º=π/2	*0*
180º=π	*½*
270º=3π/2	*0*
360º=3π/2	*-1/2*

$$\overrightarrow{OX}\begin{cases} x = \pi/2 \\ x = 3\pi/2 \end{cases} \qquad \overrightarrow{OY} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$a = \frac{1}{2}\begin{cases} MV: y = 1/2;\ x = 0 \\ mV: y = -1/2;\ \cos x = \pi \end{cases} \qquad \begin{matrix} Rgo\, f = \left[-1/2,\ 1/2\right] \\ T = 2\pi;\ Pulsación = 1 \end{matrix}$$

Fase $c = 0$*; no tiene desplazamiento horizontal.*



3) $y = \cos\left(x + \pi/2\right)$ $\qquad$ *dom* $f = \Re$; $\qquad$ *rgo* $f = [-1, 1]$

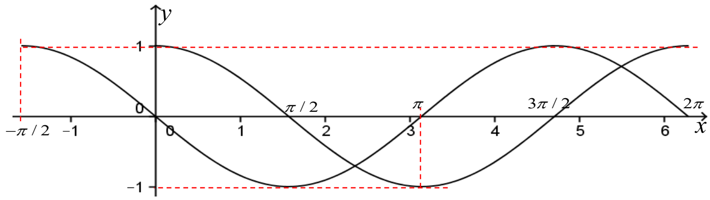
$$\overrightarrow{OX}\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \qquad \overrightarrow{OY} \Rightarrow f(0) = \cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow P(0, 0)$$

$$ceros\begin{cases} x + \pi/2 = \pi/2 \Rightarrow x = 0 \\ x + \pi/2 = 3\pi/2 \Rightarrow x = 3\pi/2 - \pi/2 = \pi \end{cases}$$

$$A:1\begin{cases} MV: y = 1;\ x + \pi/2 = 0 \Rightarrow x = -\pi/2 \\ mV: y = -1;\ \cos x + \pi/2 = \pi \Rightarrow x = \pi/2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} Rgo\, f = [-1,\ 1] \\ T = 2\pi;\ Pulsación = 1 \end{matrix}$$

Fase $c = -\pi/2$*; se desplaza* $\pi/2$ *a la izquierda.*

2)



4) $y = \cos(x - \pi)$ $\qquad$ *dom* $f = \Re$; $\qquad$ *rgo* $f = [-1, 1]$

$$ceros\begin{cases} x - \pi = \pi/2 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi = 3\pi/2 \\ x - \pi = 3\pi/2 \Rightarrow x = 3\pi/2 + \pi = 5\pi/2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OX}\begin{cases} x = 3\pi/2 \\ x = 5\pi/2 \end{cases} \qquad \overrightarrow{OY} \Rightarrow f(0) = \cos(0 - \pi) = -1 \Rightarrow P(0, -1)$$

$$a = 1\begin{cases} MV: y = 1;\ x - \pi = 0 \Rightarrow x = \pi;\ x = 3\pi \\ mV: y = -1;\ \cos x - \pi = \pi \Rightarrow x = 2\pi \end{cases} \qquad \begin{matrix} Rgo\, f = [-1,\ 1] \\ T = 2\pi;\ Pulsación = 1 \end{matrix}$$

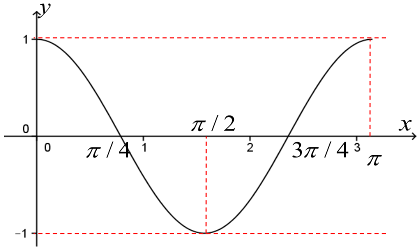
Fase $c = \pi$*; se desplaza* π *a la derecha.*

5) $y = \cos(2x) \qquad dom\ f = \Re; \qquad rgo\ f = [-1,\ 1]$

$$ceros\begin{cases} 2x = \pi/2 \Rightarrow x = \pi/4 \\ 2x = 3\pi/2 \Rightarrow x = 3\pi/4 \end{cases} \qquad \overline{OX}\begin{cases} x = \pi/4 \\ x = 3\pi/4 \end{cases} \qquad \overrightarrow{OY} \Rightarrow f(0) = \cos(2\cdot 0) = 1 \Rightarrow P(0,\ 1)$$

$$a = 1\begin{cases} MV: y = 1;\ 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ mV: y = -1;\ 2x = \pi \Rightarrow x = \pi/2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} Rgo\ f = [-1,\ 1] \\ T = \pi;\quad Pulsación = 2 \end{matrix}$$

$Fase: c = 0;$ *no se desplaza horizontalmente.*

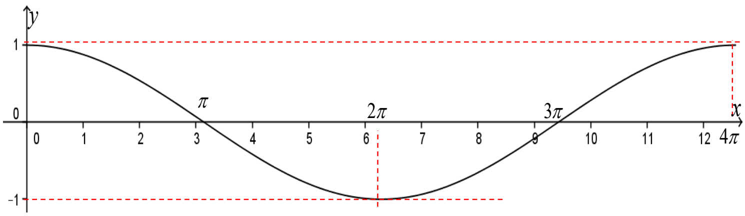


6) $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \qquad dom\ f = \Re; \qquad rgo\ f = [-1,\ 1]$

$$\overrightarrow{OX}\{x = \pi \qquad \overrightarrow{OY} \Rightarrow f(0) = \cos\left(\frac{1}{2}\cdot 0\right) = 1 \Rightarrow P(0,\ 1) \qquad ceros\left\{\frac{1}{2}x = \pi/2 \Rightarrow x = \pi\right.$$

$$A:1\begin{cases} MV: y = 1;\ \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ mV: y = -1;\ \frac{1}{2}x = \pi \Rightarrow x = 2\pi \end{cases} \qquad \begin{matrix} Rgo\ f = [-1,\ 1] \\ T = 4\pi;\quad Pulsación = 1/2 \end{matrix}$$

$Fase: c = 0;$ *no se desplaza horizontalmente.*

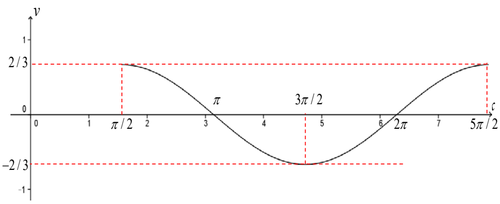


Ejemplos generales:

1) $f(x) = \frac{2}{3}\cos\left(x - \pi/2\right)$

$dom\ f = \Re$

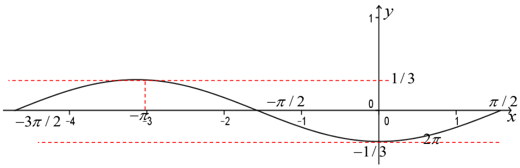
$rgo\ f = \left[-2/3,\ 2/3\right]$



2) $f(x) = \frac{1}{3} sen\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

$dom\, f = \Re$

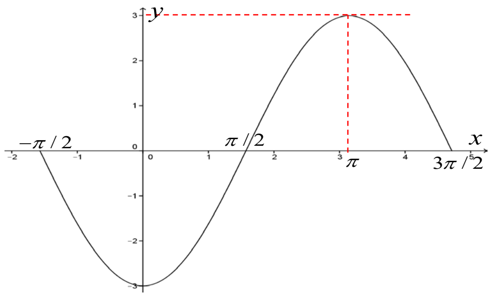
$rgo\, f = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$



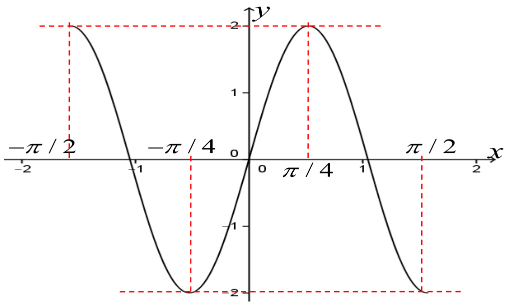
3) $f(x) = sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

$dom\, f = \Re$

$rgo\, f = [-3, 3]$



4) $f(x) = 2sen(x+3)$



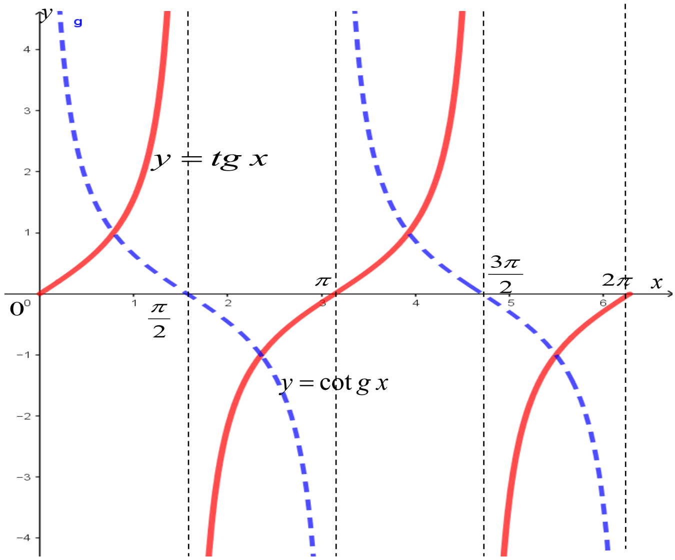
La Función Tangente y la Función Cotangente

$$y = tg\, x = \frac{sen\, x}{\cos x}$$

$$\begin{cases} dom\, tg = \Re - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\},\ n \in Z \\ rgo \cos = \Re \end{cases}$$

$$y = \cot g\, x = \frac{\cos x}{sen\, x}$$

$$\begin{cases} dom\, tg = \Re - \{n\pi\},\ n \in Z \\ rgo \cos = \Re \end{cases}$$



EJEMPLO

Dadas las siguientes funciones, analice: dominio; intersecciones con ejes coordenados, si posee; simetría; asíntotas verticales y horizontales, si posee; represéntelas gráficamente en un sistema cartesiano; rango y diga si es biunívoca.

Haremos todos los estudios vistos hasta ahora en una función y la graficaremos:

1) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

Dominio: Se trata de una función polinomial (cuadrática), cuyo dominio es: $dom\ f = \Re$

Intersecciones con ejes:

$\cap\ c/\overrightarrow{OX} : x^2 + 5x + 6 = 0; x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{-5 \pm 1}{2} \begin{cases} x = -3 \therefore P(-3{,}0) \\ x = -2 \therefore P(-2{,}0) \end{cases}$

$\cap\ c/\overrightarrow{OY} : f(x) = 6 \therefore P(0{,}6)$

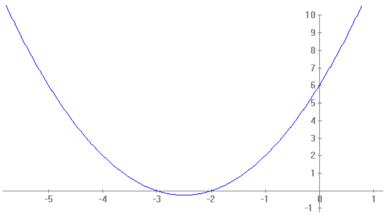
Simetría:

$f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) + 6 = x^2 - 5x + 6 \neq f(x) \therefore f\ \ no\ es\ Par$ f no tiene simetría

$-f(-x) = -x^2 + 5x - 6 \neq f(x) \therefore f\ \ no\ es\ Impar$

Asíntotas: f no tiene AV, ni AH, por ser función polinomial.

Rango de f: Para determinar el rango debemos calcular la ordenada del vértice de la parábola:



$$k = \frac{-b^2}{4a} + c \therefore k = \frac{-25}{4} + 6 = -\frac{1}{4}$$

$$rgo\ f = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$$

f no es Biunívoca.

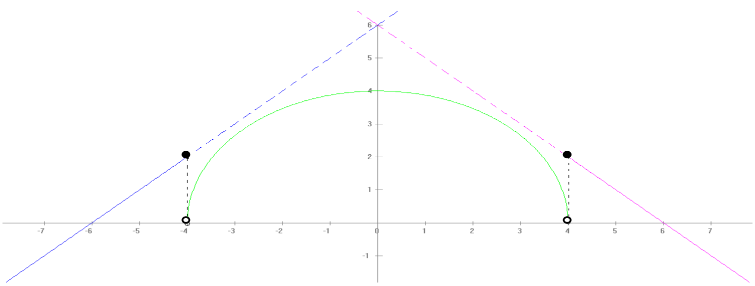
2)
$$f(x) = \begin{cases} x+6; & si\ \ x \leq -4 \\ \sqrt{16-x^2}; & si\ \ -4 < x < 4 \\ 6-x; & si\ \ x \geq 4 \end{cases}$$

Dominio: Analizando cada rama de la función se puede observar que uniendo los tres intervalos de domino cubren el conjunto completo de los reales, entonces: $dom\ f = \Re$

Intersecciones con ejes:

$$\cap c / \overrightarrow{OX} : y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+6=0 \Rightarrow x=-6 \therefore P(-6,\ 0) \\ \sqrt{16-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-4;\ -4 \notin (-4,\ 4) \therefore \nexists \\ x=4;\ -4 \notin (-4,\ 4) \therefore \nexists \end{cases} \\ 6-x=0 \Rightarrow x=6 \therefore P(6,\ 0) \end{cases}$$

Asíntotas: La función no tiene AV, ni AH.
f no es Biunívoca.



3)

$$y = e^{|x+1|}$$

Dominio: La función $y = e^x$ tiene por dominio todos los $\Re$; en consecuencia, la función dada tendrá: $domf = \Re$

Intersecciones con ejes:

$\bigcap c / \overrightarrow{OX}: y = 0; \nexists\ x \in \Re / e^{|x+1|} = 0 \therefore \nexists \bigcap c / \overrightarrow{OX}$

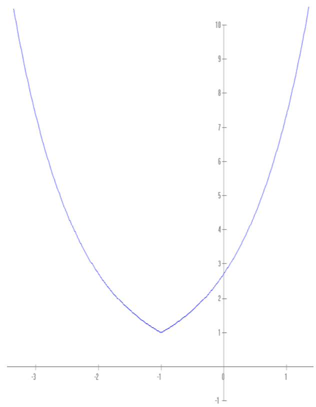
Simetría:

$y = e^{|x+1|}$

$f(-x) = e^{|-x+1|} \neq f(x) \therefore f$ *no es Par*

$-f(-x) = -e^{|-x+1|} \neq f(x) \therefore f$ *no es Impar*

f no tiene simetría.



Asíntotas:
Asíntotas Verticales: f no tiene AV, por ser función exponencial.
Asíntotas Horizontales:

$x \to -\infty;\ f \to \infty \therefore \nexists\ AH$

$x \to \infty;\ f \to \infty \therefore \nexists\ AH$

f no tiene AH.

Rango: $rgo\ f = [1, \infty)$

f no es Biunívoca.

4)

$$f(x) = |sen\ x|$$

Dominio:

$$domf =$$

Intersecciones con ejes:

$\bigcap c / \overrightarrow{OX}: |sen\ x| = 0 \Rightarrow sen\, x = 0 \Rightarrow x \in n\pi;\ n \in Z$

$\bigcap c / \overrightarrow{OY}: f(0) = 0 \therefore P(0, 0)$

Simetría:

$f(-x) = |sen\ (-x)| = |sen\ x| = f(x) \therefore f$ *es Par*

Asíntotas:
Asíntotas Verticales: f no tiene AV, por ser función seno.

Asíntotas Horizontales:

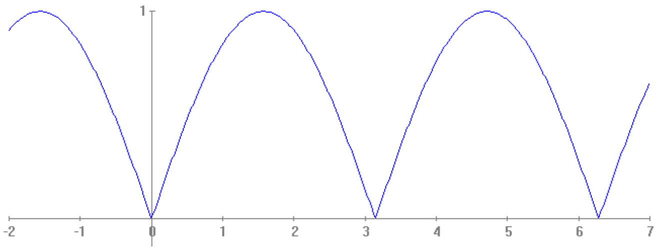
$x \to -\infty;\ f \to |sen - \infty|;$ *ascila entre* $[-1, 1] \infty \therefore \nexists\ AH$

$x \to \infty;\ f \to |sen - \infty|;$ *ascila entre* $[-1, 1] \infty \therefore \nexists\ AH$

f no tiene AH.

Rango: $domf = [-1, 1]$

f no es Biunívoca.



5) $$f(x)=\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

Dominio:

$$\frac{2x}{x-1}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}(2x>0\Rightarrow x>0)\wedge(x-1>0\Rightarrow x>1)\\ \vee \\ (2x<0\Rightarrow x<0)\wedge(x-1<0\Rightarrow x<1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases}x\in(0,\ \infty)\wedge x\in(1,\ \infty)\\ \cup \\ x\in(-\infty,\ 0)\wedge x\in(-\infty,\ 1)\end{cases}\right\}(1,\ \infty)\cup(-\infty,\ 0)=(-\infty,\ 0)\cup(1,\ \infty)\therefore\ dom\, f=(-\infty,\ 0)\cup(1,\ \infty)$$

Intersecciones con ejes:

$$\cap c/\overrightarrow{OX}:\ \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)=0\Rightarrow\frac{2x}{x-1}=1\Rightarrow 2x=x-1\Rightarrow x=-1\therefore P(-1,\ 0)$$

$$\cap c/\overrightarrow{OY}: x=0\ \nexists;\ 0\notin dom\, f$$

Simetría:

$$f(-x)=\ln\left(\frac{2(-x)}{(-x)-1}\right)=\ln\left(\frac{-2x}{-x-1}\right)\neq f(x)\Rightarrow No\ Par$$

$$-f(-x)=-\ln\left(\frac{-2x}{-x-1}\right)\neq f(x)\Rightarrow No\ Impar$$

f no tiene Simetría

Asíntotas:

Asíntotas Verticales:

Las posibles AV son x=0 y x=1, puesto que son los valores extremos de los intervalos del dominio de f. Por lo tanto, tenemos que estudiar el comportamiento de la función cuando la variable x se acerca a esos valores.

Pero x puede tender (acercarse) a 0, solo con valores menores que 0, ya que $f\ \nexists\ \forall\in[0,\ 1]$. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$Si\ x \to 0^-;\ f \to \ln\left(\frac{0}{1}\right) \to \ln(0) \to -\infty$$

$$\therefore x = 0\ es\ AV\ de\ f$$

Mediante un análisis similar, para x=1; solo que acá x tiende a 1 por la derecha:

$$Si\ x \to 1^+;\ f \to \ln\left(\frac{2}{0}\right) \to \ln(\infty) \to \infty$$

$$\therefore x = 1\ es\ AV\ de\ f$$

Asíntotas Horizontales:

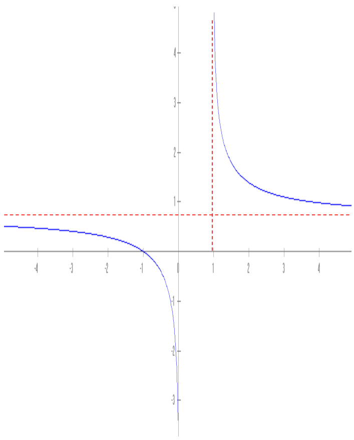
Existirá AH si, a medida que la variable x toma valores cada vez más grandes en valor absoluto, f se acerca a un número real k.

Esto se expresa de la siguiente manera:

$$Si\ x \to \pm\infty;\ f \to \ln(2) \therefore 2 = \ln(2) \cong 0{,}69$$

$$\therefore y = \ln(2)\ es\ AH\ de\ f$$

$$rgo\ f = (-\infty,\ \ln 2) \cup (\ln 2, -\infty)$$



f no es Biunívoca.

6)

$$f(x) = \ln(4 - x^2)$$

Dominio:

$$4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in (-2,\ 2) \therefore\ dom\ f = (-2,\ 2)$$

Intersección con ejes:

$$f(x) = \ln(4 - x^2)$$

$$\cap c/\overrightarrow{OX} : \ln(4 - x^2) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{3} \wedge x = -\sqrt{3} \therefore P(-\sqrt{3},\ 0);\ P(\sqrt{3},\ 0)$$

$$\cap c/\overrightarrow{OY} : f(0) = \ln 4 \cong 1{,}38 \therefore P(0,\ \ln 4)$$

Simetría:

$$f(-x) = \ln\left[4 - (x^2)\right] = \ln(4 - x^2) = f(x) \therefore f\ es\ PAR$$

Asíntotas:

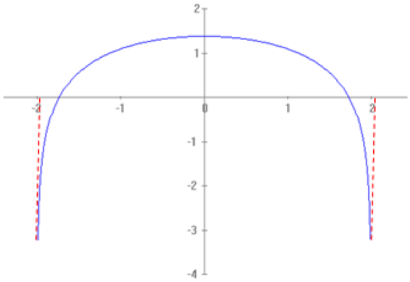
Asíntotas Verticales:

$$f(x) = \ln(4 - x^2)$$

$$Si\ x \to -2^+;\ f \to \ln(0) \to -\infty \therefore x = -2\ es\ AV\ de\ f$$

$$Si\ x \to 2^-;\ f \to \ln(0) \to -\infty \therefore x = 2\ es\ AV\ de\ f$$

Asíntota Horizontal:
Observando el dominio de f, podemos apreciar que x no puede ser mayor que 2 ni menor que -2; por lo tanto, x no puede tender a $+\infty$, ni a $-\infty$. Entonces, f no tiene AH.



f no es Biunívoca.

7) $$h: h(x) = \begin{cases} x^2 - 1; & si\ |x| < 2 \\ |x|; & si\ |x| > 2 \end{cases}$$

Dominio: $dom\ f = \Re - \{2\}$

Intersecciones con ejes:

$$\cap c/\overrightarrow{OX} : h(x) = 0 \Rightarrow \left. \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1;\ x = 1 \\ |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \right\} \therefore P(-1, 0);\ P(0, 0);\ P(1, 0)$$

$$\cap c/\overrightarrow{OY} : h(0) = -1 \therefore P(0, -1)$$

Simetría:

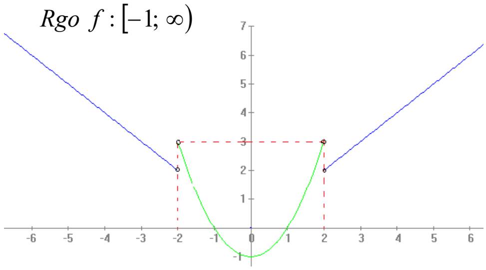
$$h(-x) = \left. \begin{cases} Si\ x \in (-2, 2);\ h(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 \\ Si\ x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty);\ h(-x) = |-x| = |x| \end{cases} \right\} h(-x) = h(x) \therefore h\ es\ PAR$$

Asíntotas:

Asíntotas Verticales: No posee, ya que ninguna de las dos ramas de la función tiene AV.

Asíntotas Verticales: No posee, por razones análogas a la anterior.

$Rgo\ f: [-1; \infty)$



f no es Biunívoca.

8) $$g(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$$

Dominio:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \wedge x \neq 2 \therefore dom\ f = \Re - \{-2, 2\}$$

Intersecciones con ejes:

$$\cap c/\overrightarrow{OX}: \frac{4}{x^2-4}=0 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=-\sqrt{8} \wedge x=\sqrt{8} \therefore P\left(-\sqrt{8},\ 0\right);\ P\left(\sqrt{8},\ 0\right)$$

$$\cap c/\overrightarrow{OY}: g(0)=-1 \therefore P(0,\ -1)$$

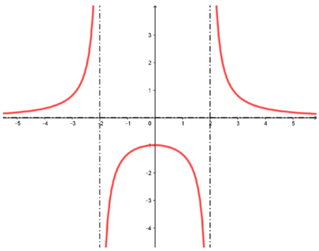
Simetría:

$$g(-x)=\frac{4}{(-x)^2-4}=\frac{4}{x^2-4} \therefore f \ es \ PAR$$

Asíntotas:
Asíntotas Verticales:

$$Si \ x \to -2;\ g \to -\infty \therefore x=-2 \ es \ AV \ de \ g$$

$$Si \ x \to 2;\ g \to \infty \therefore x=2 \ es \ AV \ de \ g$$



Asíntotas Horizontales:

$$\left.\begin{array}{l} Si \ x \to -\infty;\ g \to 0 \\ Si \ x \to \infty;\ g \to 0 \end{array}\right\} \therefore y=0 \ es \ AH \ de \ g$$

Rango: $rgo\ f=(-\infty,\ -1]\cup(0,\ \infty)$

f no es Biunívoca.

9)

$$f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)$$

Dominio:

$$\frac{x}{x-4}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x>0)\wedge(x-4>0 \Rightarrow x>4) \\ \vee \\ (x<0)\wedge(x-4<0 \Rightarrow x<4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in(0,\ \infty)\cap x\in(4,\ \infty) \\ \cup \\ x\in(-\infty,\ 0)\cap x\in(-\infty,\ 4) \end{array}\right\} (4,\ \infty)\cup(-\infty,\ 0) \therefore dom\ f=(-\infty,\ 0)\cup(4,\ \infty)$$

Intersecciones con ejes:

$$\cap c/\overrightarrow{OX}: \ln\left(\frac{x}{x-4}\right)=0 \Rightarrow \frac{x}{x-4}=1 \Rightarrow x=x-4 \therefore \nexists \cap c/\overrightarrow{OX}$$

$$\cap c/\overrightarrow{OY}: x=0;\ 0 \notin dom\ f \therefore \nexists \cap c/\overrightarrow{OY}$$

Asíntotas:
Asíntotas Verticales:

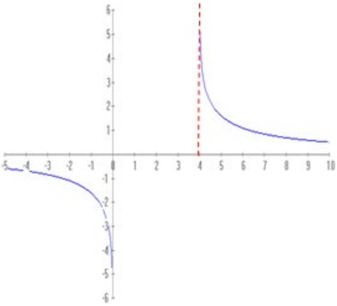
$$Si \ x \to 0^-;\ f \to -\infty \therefore x=0 \ es \ AV \ de \ f$$

$$Si \ x \to 4^+;\ f \to \infty \therefore x=4 \ es \ AV \ de \ f$$

Asíntotas Horizontales:

$Si\ x \to -\infty;\ f \to \ln 1 = 0 \therefore\ y = 0\ es\ AH\ de\ f$

$Si\ x \to +\infty;\ f \to \ln 1 = 0 \therefore\ y = 0\ es\ AH\ de\ f$



$rgo\ f = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ \infty)$

f no es Biunívoca.

10) $$f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}}$$

Dominio:

$x^2 - 2 > 0 \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right) \therefore dom\ f = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$

Intersecciones con ejes:

$\cap c / \overrightarrow{OX} : \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-2}} = 0 \Rightarrow x = 4 \therefore P(4,\ 0)$

$\cap c / \overrightarrow{OY} : x = 0;\ 0 \notin dom\ f\ \therefore \nexists \cap c / \overrightarrow{OY}$

Simetría:

$f(-x) = \dfrac{-x-4}{\sqrt{(-x)^2-2}} = \dfrac{-x-4}{\sqrt{x^2-2}} \neq f(x) \therefore No\ Par$ $\quad$ f no tiene simetría

$-f(-x) = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-2}} \neq f(x) \therefore No\ Impar$

Asíntotas:

Asíntotas Verticales:

$Si\ x \to -\sqrt{2};\ f \to -\infty \therefore\ x = -\sqrt{2}\ es\ AV\ de\ f$

$Si\ x \to \sqrt{2};\ f \to -\infty \therefore\ x = \sqrt{2}\ es\ AV\ de\ f$

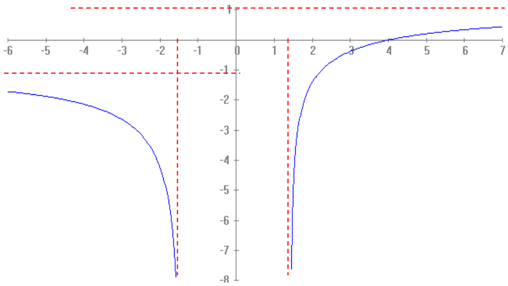
Asíntotas Horizontales:

$Si\ x \to -\infty;\ f \to -\infty \therefore\ x = -\sqrt{2}\ es\ AV\ de\ f$

$Si\ x \to \infty;\ f \to \infty \therefore\ x = \sqrt{2}\ es\ AV\ de\ f$

Asíntotas Horizontales: Conviene darle a la variable independiente *x*, valores cada vez más grandes positivos como negativos y apreciar el comportamiento de la función.

x	$f(x)$
-100	-1,040
-1.000	-1,004
$x \to -\infty$	$f \to -1$
100	0,96
1.000	0,996
$x \to \infty$	$f \to 1$



$y = -1$ *es AH de* f

$y = 1$ *es AH de* f

Rango:

$rgo\, f = (-\infty, 1)$

f no es Biunívoca.

11) $$f : f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$$

Dominio: $dom\, f = \Re$

Intersecciones con ejes:

$\bigcap c / \overrightarrow{OX} : x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;

en casos como este debemos aplicar el teorema de las raíces racionales de Gauss, visto en el capítulo 1.

$$k = \frac{divisores\ de\ a_n : 1, -1,\ 2, -2,\ 4, -4,\ 8\, y -8}{divisores\ de\ a_0 : 1\ y -1};\ k : 1, -1,\ 2, -2,\ 4, -4,\ 8\, y -8$$

Los posibles factores de f son: $(x-1)$; $(x+1)$; $(x-2)$; $(x+2)$; $(x-4)$; $(x+4)$; $(x-8)$; $(x+8)$

Aplicamos la regla de Ruffini, eligiendo dividir por: $(x-2)$, en el polinomio completo y ordenado:

	1	0	−2	0	−8
2		2	4	4	8
	1	2	2	4	0

	1	2	2	4
−2		−2	0	−4
	1	0	2	0

El polinomio cociente en esta última división es (x^2+2), que es irreductible. Entonces: (x^2+2), $(x-2)$ y $(x+2)$ son factores del polinomio, que queda expresado de la siguiente manera: $P(x) = (x^2+2)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

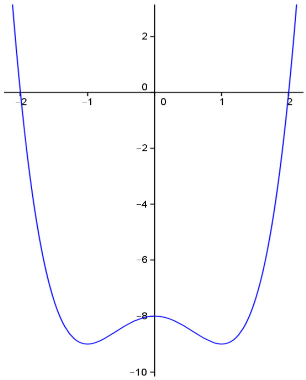
De manera que las intersecciones con el eje OX, son: $P(-2, 0)$ y $P(2, 0)$.

Simetría:
$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2-8=x^4-2x^2-8=f(x)$
; f es Par

Asíntotas: f no tiene AV, ni AH, por ser función polinomial.

Rango:

$$rgof=[-1/3,1/3]$$



Bibliografía

Abálsamo, Roxana (2016). *Matemática*. Buenos Aires: Editorial Puerto de Palos S.A.

Berio, Adriana y otros (2001). *Matemática 1*. Buenos Aires: Editorial Puerto de Palos S.A.

— (2001), *Matemática 2*. Buenos Aires: Editorial Puerto de Palos S.A.

De Guzmán, Miguel y otros (1998). *Matemáticas, Bachillerato 1*. Madrid: Grupo Anaya S.A.

— (1998). *Matemáticas, Bachillerato 2*. Madrid: Grupo Anaya S.A.

Di Caro, Héctor (1987). *Álgebra y elementos de geometría analítica. Tomo II*. Buenos Aires: Grafica Munro Editora SRL.

— (1987). *Álgebra y elementos de geometría analítica. Tomo I*. Buenos Aires: Gráfica Munro Editora SRL.

Etchegoyen, Susana N. y otros (2001). *Matemática 1*. Buenos Aires: Kapelusz Editorial S.A.

Fernández de Musomecci, Dora M. y otras (2003). *Matemática para ingresantes a la Universidad.* San Miguel de Tucumán: Magna Publicaciones.

Fones, María A., (2005). *Matemática 2*. Buenos Aires Kapelusz Editorial S.A.

Kaczor, Pablo I. y otros, (1999). *Matemática I*. Buenos Aires Ediciones Santillana S.A.

Pérez González, Francisco J. (2006). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*. Departamento de Análisis Matemático Universidad de Granada.

— (2015). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.* Bajo licencia de Creative Commons. Depto. de Análisis Matemático Universidad de Granada. www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo diferencial integral func una var.pdf

PROYECTO EMCI. (1988). *Proyecto de Investigación: "La enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería"*. Universidad Nacional de San Juan.

Purcell, E. y otros (1993). *Cálculo con geometría analítica*. México D.F.: Prentice Hall Hispanoamérica S.A.

Toranzo, Fausto (1966). *Enseñanza de la matemática*. Buenos Aires: Kapelusz Editorial S.A.

Wikipedia (2018). *Perspectiva de las secciones cónicas*.

El autor

GUSTAVO ENRIQUE MENOCAL

Nació en 1959. Ingeniero Civil egresado de la Universidad Nacional de Córdoba y Magister en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior por la Universidad Nacional de Tucumán. Se dedica a la ingeniería y a la docencia de matemática universitaria.

Profesor Asociado en la Universidad del Norte Santo Tomás de Aquino entre 1990 y 2010; y Profesor Adjunto en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Tucumán, desde 1990 hasta el presente.

EDUNSE
editorial universitaria

Queremos hacer libros cada vez mejores
¡Necesitamos saber qué piensas!
Contesta una pequeña encuesta haciendo clic aqui y contándonos tu parecer

Si el libro de EDUNSE te gustó mucho agradecemos que nos recomiendes y que sigas conociendo nuestro catálogo.

El presente libro de cátedra orienta al docente del nivel medio en la preparación de los estudiantes para iniciar con éxito los estudios de nivel superior.

A su vez, es un material de consulta para los estudiantes de carreras universitarias que requieran de una revisión de esos conocimientos, que los ayudará a superar dificultades que se presenten en el estudio de las distintas carreras universitarias.

Además de presentar y explicar de manera sencilla los contenidos, este volumen tiene una gran cantidad de ejemplos, que cubren los problemas tipo que se presentan con frecuencia.

UNSE
Universidad Nacional de Santiago del Estero

EDUNSE
editorial universitaria